การจัดการความรู้ในหัวข้อ
คณิตศาสตร์

โดย

กองวิชาคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์

ส่วนการศึกษา
โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า

2555

ชื่อผลงาน ความรู้ด้านคณิตศาสตร์

เจ้าของผลงาน/สังกัด คณาจารย์สายคณิตศาสตร์/กองคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา รร.จปร.

ประเภทของผลงาน รวบรวมเกร็ดความรู้ทางคณิตศาสตร์

ข้อมูลเกี่ยวกับผลงาน

เป็นการรวบรวมเทคนิค วิธีคิด การคำนวณต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และเป็นประโยชน์กับบุคคลทั่วไป นำมาจัดเรียงเป็นหมวดหมู่ให้เข้าถึงได้ง่าย

ลักษณะของผลงาน

เป็นการนำบทความที่เกี่ยวกับ เทคนิค วิธีคิด การคำนวณต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ ที่ช่วยให้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายขึ้น และน่าเรียนรู้ มารวบรวม จัดหมู่ไว้ในระบบฐานข้อมูลของกองวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อให้ทุกคนสามารถเข้าถึงได้ผ่านทางเวปไซต์ของกองวิชาฯ และรวมถึงการตั้งกระทู้คำถาม-คำตอบ เพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนองค์ความรู้

ปัจจัยแห่งความสำเร็จ

1. บุคลากรในหน่วยช่วยกันรวบรวมข้อมูลที่เป็นประโยชน์และน่าสนใจ และสามารถนำไปใช้ได้จริง
2. หมั่นช่วยกันปรับปรุงข้อมูลให้ทันสมัย ไม่ว่าจะเป็นการแก้ไข เพิ่มเติม
3. มีการเผยแพร่ ประชาสัมพันธ์ โดยเฉพาะในกลุ่มเยาวชน นักเรียน นักศึกษา ซึ่งเป็นกลุ่มที่สามารถได้รับประโยชน์จากผลงานสูงสุด ให้ทราบ
4. มีการแลกเปลี่ยนองค์ความรู้

ความสัมฤทธิ์

ผลงานได้ช่วยเพิ่มพูนความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ ให้กับกลุ่มเยาวชน นักเรียน นักศึกษา และบุคคลทั่วไปและ ได้นำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริง

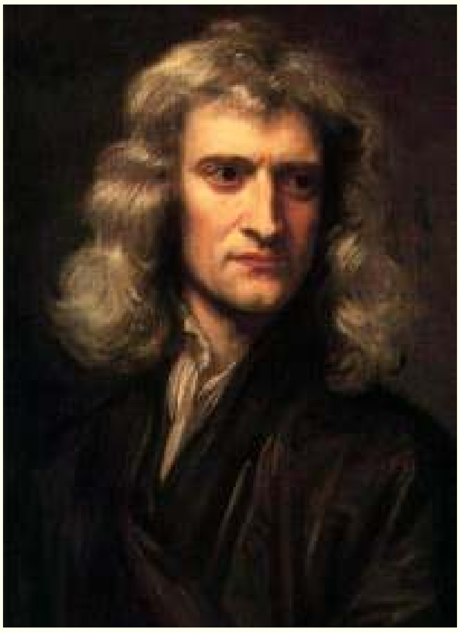
ความภาคภูมิใจ

1. เผยแพร่ความรู้สู่สังคม ยกระดับองค์ความรู้ของกลุ่มเยาวชน นักเรียน นักศึกษาไทย
2. เป็นแหล่งค้นคว้าทางคณิตศาสตร์ให้กับเยาวชน นักเรียน นักศึกษา และบุคคลทั่วไป
3. เป็นแหล่งแลกเปลี่ยนองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์

สารบัญ

ประวัติ แคลคูลัส (Calculus)

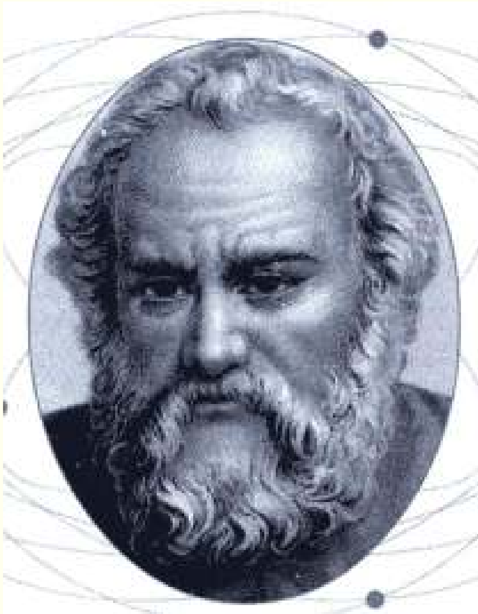
แคลคูลัส เป็นวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่ง สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการอธิบายกฎเกณฑ์ธรรมชาติ เป็นพื้นฐานของความเข้าใจโลก และปรากฏการณ์ต่าง ๆ แคลคูลัสช่วยให้เราสามารถคำนวณวงโคจรของดาวต่าง ๆ ช่วยให้เราคำนวณกระแสน้ำ การคำนวณหาเส้นแรงในอาคารรูปแปลก ๆ เพื่อให้สามารถสร้างอาคารเหล่านั้น เป็นวิชาที่จำเป็นสำหรับนักวิทยาศาสตร์แทบทุกแขนง



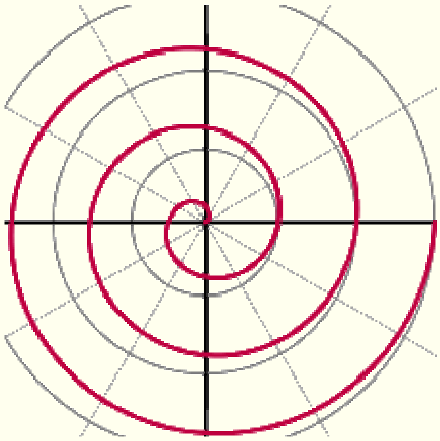
เซอร์ ไอแสค นิวตัน **กอตฟริค ไลปนิช**

ผู้ที่เกิดแนวคิดเรื่องแคลคูลัสก่อนผู้ใด เมื่อราว ปี 1667 เซอร์ ไอแสค นิวตัน นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ สนใจในเรื่องคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา กฎเกณฑ์ของการเปลี่ยนแปลงนี้เอง ทำให้เป็นที่มาของแคลคูลัส ในเรื่องของอินทิกรัลและดิฟเฟอเรนเชียล ต่อมาไม่นานก็มีนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ กอตฟริค ไลปนิช ก็เกิดแนวติดในทำนองเดียวกัน ทั้งสองคนเขียนจดหมายแลกเปลี่ยนทัศนะ และแนวคิดกัน

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์ที่ถือกำเนิดขึ้นในศตวรรษที่ 17 แต่ถ้าไล่ย้อนไปในอดีต ก็จะพบแนวความคิดหรือเทคนิคต่าง ๆที่นักคณิตศาสตร์สมัยก่อนหน้านั้นได้ช่วยคิดช่วยสร้างมาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณโน่น ซึ่งมีรายละเอียดมาก พอจะสรุปหลัก ๆ ที่สำคัญ ดังนี้



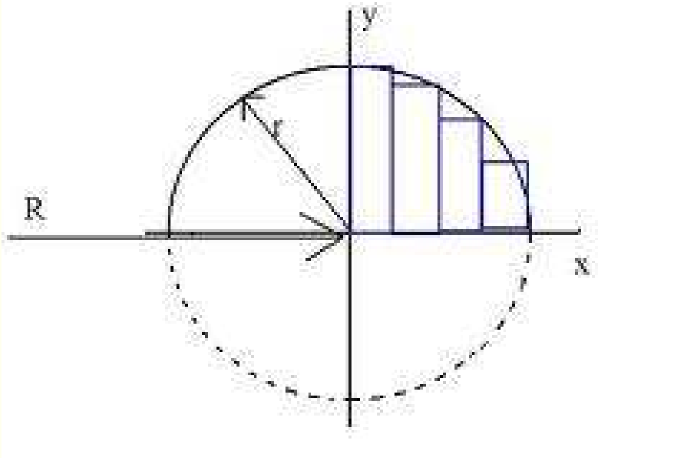
อาร์คิมีดิส



เส้นสัมผัสรูปร่างเกลียวหอย

นักคณิตศาสตร์สมัยโบราณหลายคน เช่น อาร์คิมีดิส เคยคิดวิธีหาเส้นสัมผัสรูปร่างเกลียวหอย โจทย์ข้อนี้สำคัญมาก เพราะน่าจะเป็นโจทย์เกี่ยวกับ เส้นสัมผัสหรือ “ดิฟเฟอเรนเชียล แคลคูลัส” เพียงข้อเดียวในประวัติศาสตร์ ส่วนที่เหลือ เช่น การคำนวนหาพื้นที่วงกลม ปริมาตร และพื้นผิวของทรงกลมได้อย่างไร ซึ่งจากมุมมองสมัยนี้ เป็นโจทย์เกี่ยวกับผลรวม หรือ “อินทิกรัล แคลคูลัส” ทั้งสิ้น

นอกจากนี้ นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ได้ตั้งโจทย์เกี่ยวกับ ลิมิต และค่าอนันอีกด้วย แต่ที่น่าจะสำคัญที่สุดคือ เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "วิธีใช้ทั้งหมดของยูโดซัส" ซึ่งมีหลักการง่าย ๆว่า ถ้าต้องการคำนวณหาพื้นที่รูปทรงประหลาดๆ ที่สนใจก็แบ่งพื้นที่ให้เป็นรูปง่ายๆ เช่น รูป 3 เหลี่ยม 4 เหลี่ยม โดยเริ่มจากการใช้รูปง่าย ๆ ใส่ลงไปในพื้นที่ที่ต้องการหาและซอยย่อยลงไปเรื่อยๆ ดังนั้นผลรวมก็จะได้ใกล้เคียงกับพื้นที่ที่ต้องการ



นี่คือเทคนิคการอินทิเกรต โดยใช้ภาพ ของนักคณิตศาสตร์กรีกโบราณนั่นเอง นักคณิตศาสตร์ชาวเอเชียก็มีผู้คิด"ปฐมแคลคูลัส"ไว้คือ คนจีนกับคนญี่ปุ่น นักคณิตศาสตร์ญี่ปุ่นคำนวนหาพื้นที่วงกลม โดยแบ่งเป็นแถบ 4 เหลี่ยมย่อย ๆ

จวบจนถึงคริต์ศตวรรษที่ 14 จึงมีคำถามประเภทว่า วัตถุเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ จะหาระยะทางที่วิ่งไปได้อย่างไร แต่แคลคูลัสสมัยใหม่ต้องรอเวลานานกว่าจะถือกำเนิดขึ้นได้ เพราะ แคลคูลัส จำเป็นต้องใช้แนวคิดจากคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ หลายวิชานำมาก่อน เช่น ฟังก์ชั่น พีชคณิตสัญลักษณ์ และเรขาคณิตวิเคราะห์

แนวคิดเรื่องฟังก์ชันนี้มาสุกงอม ตอนที่กาลิเลโอมาศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่ ส่วนสองเรื่องหลังคือ พีชคณิตสัญลักษณ์ และเรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นฝีมือของเดอคาร์ตส์ยอดนักคณิตศาสตร์ที่คิดแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียนให้เราใช้กันจนถึงเดี๋ยวนี้นี่เอง

สูตรการหาอนุพันธ์

ฟังก์ชันทั่วไป

$\frac{d}{dx}[c]$	$=$	0	
$\frac{d}{dx}[cf(x)]$	$=$	$cf'(x)$	
$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]$	$=$	$f'(x)+g'(x)$	
$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]$	$=$	$f'(x)-g'(x)$	
$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$	$=$	$f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$	กฎผลคูณ
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$	$=$	$\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	กฎผลหาร
$\frac{d}{dx}[x^n]$	$=$	nx^{n-1}	กฎการยกกำลัง
$\frac{d}{dx}[f(u)]$	$=$	$f'(u)\frac{du}{dx}$	กฎลูกโซ่

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$\frac{d}{dx}[\sin x]$	$=$	$\cos x$	$\frac{d}{dx}[\csc x]$	$=$	$-\csc x\cot x$
$\frac{d}{dx}[\cos x]$	$=$	$-\sin x$	$\frac{d}{dx}[\sec x]$	$=$	$\sec x\tan x$
$\frac{d}{dx}[\tan x]$	$=$	$\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[\cot x]$	$=$	$-\csc^2 x$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอกาลิทึม

$\frac{d}{dx}[e^x]$	$=$	e^x	$\frac{d}{dx}[a^x]$	$=$	$a^x\ln a$
$\frac{d}{dx}[\ln x]$	$=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}[\log_a x]$	$=$	$\frac{1}{x\ln a}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

$\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}x\right]$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}x\right]$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}x\right]$	$=$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}x\right]$	$=$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}x\right]$	$=$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}\left[\csc^{-1}x\right]$	$=$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$\frac{d}{dx}\left[\sinh x\right]$	$=$	$\cosh x$	$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sech} x\right]$	$=$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\frac{d}{dx}\left[\cosh x\right]$	$=$	$\sinh x$	$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{csch} x\right]$	$=$	$-\operatorname{csch} x \coth x$
$\frac{d}{dx}\left[\tanh x\right]$	$=$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{d}{dx}\left[\coth x\right]$	$=$	$-\operatorname{csch}^2 x$

สูตรหาปริพันธ์

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$
$$\int e^u\,du = e^u + C$$
$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$
$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$
$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$
$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$
$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$
$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$
$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

<u>เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ</u>

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

ประวัติเครื่องหมายคณิตศาสตร์

เครื่องหมายแทนการหาร ÷ หรือ สัญลักษณ์ ÷ ได้ถูกนำมาใช้โดย จอห์น วอลลิส (John Wallis 1616–1703) ในประเทศอังกฤษและสหรัฐอเมริกา แต่ไม่แพร่หลายในทวีปยุโรป เพราะใช้เครื่องหมายโครอน (:) กันจนชินแล้ว ในปี 1923 คณะกรรมการแห่งชาติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา กล่าวว่า เครื่องหมาย หาร (÷) และ เครื่องหมายโครอน (:) ไม่ได้ถูกนำมาใช้ในชีวิตธุรกิจแต่ใช้ในวิชาพีชคณิตเท่านั้น จึงได้มีการนำเครื่องหมายเศษส่วน (/) มาใช้แทนเครื่องหมายหาร (÷)
<u>หมายเหตุ</u> อ้างอิงจากรายงาน National Committee on Mathematical Requirement ของ Mathematical Association of America,Inc(1923,P 81)

เครื่องหมายแทนการคูณ × คำว่า Multiply ที่แปลว่า “คูณ” มาจากคำว่า Multiplicare เป็นภาษาละตินซึ่งหมายถึงการมีค่าเพิ่มมากขึ้นเป็นทวีคูณ นักคณิตศาสตร์ Oughtred เป็นคนคิดเครื่องหมายคูณเป็นรูป × ในปี1631 ต่อมา Harriot แนะนำให้ใช้เครื่องหมายจุด . ในปีเดียวกัน ในปี ค.ศ. 1698 Leibniz เขียนถึง Bernoulli ว่า

“ ฉันใช้ × เป็นสัญลักษณ์ในการคูณมันสับสนกับตัว X บ่อยครั้ง ฉันจึงใช้สัญลักษณ์ง่ายๆ คือ . ”

ปัจจุบันนี้การคูณใช้เครื่องหมาย 3 แบบได้แก่ 3×a หรือ 3. a หรือ (3)a หรือการวางชิดกันคือ 3a

เครื่องหมายแทนการบวก + คำว่า บวก มาจากภาษาละตินว่า adhere ซึ่งหมายความว่า “ ใส่เข้าไป ” Widman เป็นคนแรกที่คิดใช้เครื่องหมาย “ + ” และ “ – ” ในปี 1489 เขากล่าวว่า “ – คือ minus และ + คือ more เชื่อกันว่าสัญลักษณ์ “ + ” มาจากภาษาละติน et แปลว่า “ และ ”

สัญลักษณ์ π ที่ใช้ในการหาพื้นที่วงกลมมีความเป็นมาในอดีตโดยไม่มีหลักฐานที่แน่ชัดว่า π เป็นจำนวนอตรรกยะ อย่างไรก็ตาม ในคัมภีร์ไบเบิล(I Kings 7: 23) ตัว π ถูกกำหนดให้มีค่าเป็น 3 และ ในปี 1892 นิตยสาร นิวยอร์กไทม์ แสดงค่า π เท่ากับ 3.2 อีกทั้งในปี 1897 ใน House Bill หมายเลข 246 ในรัฐอินเดียนน่า ให้ π มีค่าเท่ากับ 4 ในหนังสือพิมพ์ในปี 1934 ให้ π มีค่า $\frac{22}{7}$

อย่างไรก็ตาม สัญลักษณ์ π พบครั้งแรกในปี 1934 แต่ยังไม่แพร่หลาย จนกระทั่ง Euler เริ่มนำมาใช้ในปี 1737 และ ในปี 1873 William Shanks คำนวณค่า π ได้ทศนิยม 700 ตำแหน่ง โดยเขาใช้เวลานานถึง 15 ปี อย่างไรก็ตามได้มีการนำเทคนิคทางคอมพิวเตอร์มาใช้แทนซึ่งคำนวณได้แม่นยำกว่า 100 ตำแหน่ง

“ 0 ” กำเนิดเมื่อไร ชาวอียิปต์ยังไม่มีสัญลักษณ์แทน 0 ชาวบาบิโลเนียนใช้ระบบตำแหน่งแต่ก็ยังไม่มี 0 ใช้ จึงทำให้ตัวเลขที่เขาใช้ยังไม่สมบูรณ์ จนกระทั่งในปีที่ 150 ของคริสตกาล ชาวมายัน ได้นำ 0 มาใช้เป็นกลุ่มแรก โดยใช้แสดงตำแหน่งและใช้แทนจำนวน 0 ซึ่งไม่ทราบว่านำมาใช้เมื่อใด จนกระทั่งมีบันทึกไว้ก่อนคริสต์ศตวรรษ ที่ 16 โดยนักเดินทางชาวสเปนที่เดินทางไปคาบสมุทรยูคาธาน พวกเขาพบว่า ชาวมายันได้มีการใช้ 0 อย่างแพร่หลายมาเป็นเวลานาน ก่อนที่โคลัมบัส จะค้นพบอเมริกาเสียอีก

ลอการิทึม (Logarithm) ถูกค้นพบโดย จอห์น เนเปียร์ (John Napier:1550-1617) ซึ่งได้รับยกย่องว่าเป็นผู้ค้นพบลอการิทึม และเป็นคนแรกที่พิมพ์ผลงาน Descriptio ซึ่งเกี่ยวกับลอการิทึม ในปี 1614 ในปี ค.ศ. 1588 แนวคิดที่คล้ายกันนี้ก็ได้รับการพัฒนาโดย จ้อบ บูกี้ (Jobst Burgi) Glaisher กล่าวว่า การประดิษฐ์ลอการิทึม และตารางคำนวณ มีคุณค่าอย่างยิ่งต่อวิทยาศาสตร์ไม่มีงานคณิตศาสตร์ใด ที่มีผลสืบเนื่องอย่างมีคุณค่าเท่ากับงาน Descriptio ของ เนเปียร์ ยกเว้น Principia ของ นิวตัน

<u>หมายเหตุ</u> แหล่งที่จะศึกษาทางประวัติเกี่ยวกับลอการิทึม มีอยู่ใน Encyclopedia Britanica พิมพ์ครั้งที่ 11 ฉบับที่ 16 หน้า 868 – 877 เขียนโดย J.W.L. Glaisher และมีอยู่ใน “ History of the Exponential and Logarithmic Concepts. ในหนังสือวารสาร American Mathematical Monthly. Vol.20(1913) ซึ่งเขียนโดย Florian Cajori

ประวัติตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติ (จากภาษากรีก trigonon มุม 3 มุม และ metro การวัด) เป็นสาขาของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับมุม, รูปสามเหลี่ยม และฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น ไซน์ และ โคไซน์ มีความเกี่ยวข้องกับเรขาคณิต แม้ว่าจะสรุปไม่ได้อย่างแน่ชัดว่า ตรีโกณมิติเป็นหัวข้อย่อยของเรขาคณิต

นักคณิตศาสตร์มุสลิมในยุคกลาง (หรือยุคมืด ตามคำเรียกของชาวยุโรป) มีส่วนเป็นอย่างมากในการพัฒนาและอุทิศผลงานในคณิตศาสตร์สาขาตรีโกณมิติ โดยพวกเขาได้รับแนวคิดพื้นฐานมาจาก
1. ตำราคณิตศาสตร์อินเดียที่ชื่อ Sūrya Siddhānta (สูรยสิทธานตะ)
2. ตำราอัลมาเกส (เป็นภาษาอาหรับแปลว่ายิ่งใหญ่ที่สุด แสดงให้เห็นว่านักคณิตศาสตร์อาหรับยกย่องหนังสือเล่มนี้มาก) ของทอเลมีนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงชาวกรีก
3. ตำราสเฟียริก ของเมเนลาอุสนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกเช่นกัน

อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่านักคณิตศาสตร์กรีกและอินเดียจะมีบทบาทในการพัฒนาตรีโกณมิติ แต่ทว่านักประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์หลายท่าน ได้ให้เกียรตินักคณิตศาสตร์อาหรับว่า เป็นผู้พัฒนาความรู้ในสาขานี้อย่างแท้จริง

สำหรับประเทศไทยนั้น ก็มีศาสตร์ตรีโกณมิติเข้ามาตั้งแต่สมัยสุโขทัย ผ่านทางคัมภีร์ สุริยยาตร์ สำหรับคำนวณหาตำแหน่งพระอาทิตย์และพระจันทร์ และปรากฏการณ์ข้างขึ้นข้างแรม (เพียร) โดยปรากฏตาราง SINE ทุกๆ มุม 15 องศา เรียกว่า ตารางฉายา ส่วน COSINE จะใช้หลักการเทียบจากตารางฉายา เรียกว่า โกฏิฉายา

ตรีโกณมิติวันนี้ ปัจจุบัน มีการนำตรีโกณมิติไปใช้ในงานสาขาต่างๆ เช่น เป็นเทคนิคในการสร้างรูปสามเหลี่ยม ซึ่งใช้ในวิชาดาราศาสตร์เพื่อวัดระยะทางของดาวที่อยู่ใกล้ ในภูมิศาสตร์ใช้วัดระยะทางระหว่างหลักเขตที่ดิน และใช้ในดาวเทียมนำทาง งานที่มีการใช้ประโยชน์จากตรีโกณมิติ ได้แก่ ดาราศาสตร์ (และการนำทางในมหาสมุทร บนเครื่องบิน และในอวกาศ) ,ทฤษฎีดนตรี, สวนศาสตร์, ทัศนศาสตร์, การวิเคราะห์ตลาดการเงิน, อิเล็กทรอนิกส์, ทฤษฎีความน่าจะเป็น, สถิติศาสตร์, ชีววิทยา, การสร้างภาพทางการแพทย์ (การกราดภาพตัดขวางใช้คอมพิวเตอร์ช่วย (CAT scans) และ คลื่นเสียงความถี่สูง) , เภสัชศาสตร์, เคมี, ทฤษฎีจำนวน (รวมถึง วิทยาการเข้ารหัสลับ) , วิทยาแผ่นดินไหว, อุตุนิยมวิทยา, สมุทรศาสตร์, วิทยาศาสตร์กายภาพสาขาต่างๆ, การสำรวจพื้นดิน และภูมิมาตรศาสตร์, สถาปัตยกรรม,

สัทศาสตร์, เศรษฐศาสตร์, วิศวกรรมไฟฟ้า, วิศวกรรมเครื่องกล, วิศวกรรมโยธา, เรขภาพคอมพิวเตอร์, การทำแผนที่, ผลิกศาสตร์

รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเรียกว่าคล้ายกัน ถ้ารูปหนึ่งสามารถขยายได้เป็นอีกรูปหนึ่ง และจะเป็นกรณีนี้ก็ต่อเมื่อมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน ตัวอย่างเช่น รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมร่วมกันมุมหนึ่ง และด้านที่ตรงข้ามกับมุมนั้นขนานกัน เป็นข้อเท็จจริงว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ด้านแต่ละด้านจะเป็นสัดส่วนกัน นั่นคือ ถ้าด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมหนึ่ง ยาวเป็นสองเท่าของด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน จะกล่าวได้ว่า ด้านที่สั้นที่สุดจะยาวเป็นสองเท่าของด้านที่สั้นที่สุดของอีกรูปสามเหลี่ยม และด้านที่ยาวปานกลางก็จะเป็นสองเท่าของอีกรูปสามเหลี่ยมเช่นกัน อัตราส่วนระหว่างด้านที่ยาวที่สุดและด้านที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมแรก จะเท่ากับ อัตราส่วนระหว่างด้านที่ยาวที่สุดและด้านที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมอีก รูปด้วย

จากข้อเท็จจริงเหล่านี้ เราจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ เริ่มต้นด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุมฉากหนึ่งมุม (90 องศา หรือ /2 เรเดียน) ด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยมใดๆจะอยู่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่ที่สุด แต่เพราะว่าผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา หรือ เรเดียน ดังนั้นมุมที่ใหญ่ที่สุดในรูปสามเหลี่ยมนี้คือมุมฉาก ด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยมจึงเป็นด้านที่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก นำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาสองรูปที่มีมุม A ร่วมกัน รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้จะคล้ายกัน และอัตราส่วนของด้านตรงข้ามมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากันทั้งสองรูป มันจะเป็นจำนวนระหว่าง 0 ถึง 1 ขึ้นอยู่กับขนาดของมุม A เท่านั้น เราเรียกว่า ไซน์ของ A และเขียนด้วย sin (A) ในทำนองเดียวกัน เรานิยาม โคไซน์ของ A คืออัตราส่วนระหว่าง ด้านประชิดมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญ ฟังก์ชันอื่นๆสามารถนิยามโดยใช้อัตราส่วนของด้านต่างๆของรูปสามเหลี่ยม แต่มันก็สามาถเขียนได้ในรูปของ ไซน์ และ โคไซน์ ฟังก์ชันเหล่านี้คือ แทนเจนต์, ซีแคนต์, โคแทนเจนต์, และ โคซีแคนต์

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}(a)}{\mathrm{adj}(b)} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}(c)}{\mathrm{adj}(b)}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}(b)}{\mathrm{opp}(a)} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}(c)}{\mathrm{opp}(a)}$$

วิธีจำ ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ อย่างง่ายๆคือจำว่า ข้ามฉาก ชิดฉาก ข้ามชิด (ไซน์-ด้านตรงข้าม-ด้านตรงข้ามมุมฉาก โคไซน์-ด้านประชิด-ด้านตรงข้ามมุมฉาก แทนเจนต์-ด้านตรงข้าม-ด้านประชิด)

ที่ผ่านมา ฟังก์ชันตรีโกณมิติถูกนิยามขึ้นสำหรับมุมระหว่าง 0 ถึง 90 องศา (0 ถึง $\pi/2$ เรเดียน) เท่านั้น หากใช้วงกลมหนึ่งหน่วย จะขยายได้เป็นจำนวนบวกและจำนวนลบทั้งหมด

ครั้งหนึ่ง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ถูกจัดลงในตาราง (หรือคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข) ทำให้ตอบคำถามทั้งหมดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ได้อย่างแท้จริง โดยใช้กฎไซน์ และ กฎโคไซน์

กฎเหล่านี้สามาถใช้ในการคำนวณมุมที่เหลือและด้านของรูปสามเหลี่ยมได้ เมื่อรู้ความยาวด้านสองด้านและขนาดของมุมหนึ่งมุม หรือรู้ขนาดของมุมสองมุมและความยาวของด้านหนึ่งด้าน หรือ รู้ความยาวของด้านทั้งสามด้าน

นักคณิตศาสตร์บางคนเชื่อว่าตรีโกณมิติแต่เดิมนั้น ถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้คำนวณนาฬิกาแดด ซึ่งมักเป็นโจทย์ในหนังสือเก่าๆ ที่มีความสำคัญมากในเรื่องการสำรวจ

เทคนิคคิดในใจสำหรับการบวกและลบเลขจำนวนเต็ม

การบวก ลบ เลขจำนวนเต็มสามารถลองคิดเลขในใจได้ แต่การบวก ลบ ก็ยังทำให้หลายคนกุมขมับได้ ถ้าต้องคูณ หาร แถมยกกำลังด้วย ก็คงต้องหยิบเครื่องคิดเลขมากดกันใหญ่ แต่ถ้าได้เรียนรู้เทคนิค " ***คิดในใจ*** " ตามเคล็ดลับ " ***พ่อมดคณิตศาสตร์แห่งอเมริกา*** " จากเคล็ดลับในหนังสือ " กดเครื่องคิดเลขทำไม ในเมื่อคิดในใจได้เร็วกว่า " ผลงานเขียนของ ***ดร.อาเธอร์ เบนจามิน*** (Arthur Benjamin) อาจจะทำให้หลายคนคงเก็บเครื่องคิดเลขลงลิ้นชักแน่ๆ

โดยผู้เขียนเทคนิคการคิดเลขได้ตั้งข้อสังเกต คนเรามักทำอะไรจาก ซ้ายไปขวา แต่เรากลับคิดเลขจากขวาไปซ้าย จึงได้เสนอวิธีคิดเลขจากซ้ายไปขวาบ้าง

การบวกเลข 2 หลัก

ตัวอย่าง 95 + 38 = ?

วิธีคิดในใจ คือ แยกตัวเลขเป็น 2 กลุ่ม คือ (90 + 30) และ (5 + 8) แล้วนำมารวมกัน ได้ 133

การบวกเลข 3 หลัก

ตัวอย่าง 763 + 854 = ?

วิธีคิดในใจ คือ 800 + 700 = 1,500 แล้วบวก 60 + 50 ได้ 1,600 แล้วนำไปบวกกับ 3 + 4 ที่เหลือ ได้คำตอบของโจทย์นี้เท่ากับ 1,617

วิธีการลบเลข

น่าจะเป็นวิธีที่คนทั่วไปไม่รู้ เพราะปกติเราจะตัวเลขตั้งแล้วลบ แต่วิธีของ ดร.เบนจามินคือ เปลี่ยนจากตัวเลขลบเป็นบวก (complement) เช่น -23 มี complement เป็น 77

ตัวอย่าง 138 - 68 ให้เปลี่ยนเป็น (138 + 32) = 170 หลังจากนั้นตัด 100 ออกไป จะได้ 70

ตัวอย่าง 857 - 192 = ? มีวิธีคิดง่ายๆ คือ เปลี่ยนเป็น 857 - 200 = 627 แล้วบวกด้วย 8 ที่ลบเกินไป จะได้คำตอบ 665

สำหรับวิธีคูณ

ก็คิดจากซ้ายไปขวาเช่นกัน

ตัวอย่าง 13 x 14 = ? ให้แยกเป็น (13 x 10) + (13 x 4) = 130 + 52 = 182

ตัวอย่าง 68 x 49 = ? ให้คิดเป็น 68 x 50 = 3,400 แล้วลบ 68 ที่คูณเกินมา

ตัวอย่าง 84 x 21 = ? ให้คิดเป็น 84 x 20 = 1,680 แล้วบวกด้วย 84 ที่ยังคูณไม่ครบ

เลขยกกำลัง

การยกกำลัง 2 โดยระบุว่า ให้ปัดตัวเลขเพื่อให้เหลือตัวคูณเพียง 1 หลัก ตัวอย่าง เช่น 23^2 ซึ่งแยกได้เป็น 23 x 23 ให้ปัดตัวเลขขึ้นลงเป็น 26 x 20 = 520 แล้วบวกเข้ากับจำนวนยกกำลังสองของค่าที่ปัดขึ้นลงซึ่งในตัวอย่างนี้คือ 3^2 จะได้คำตอบเป็น 529

ตัวอย่าง 78^2 ปัดได้เป็น (80 x 76) + 2^2 = 6,084

ส่วนการหาร นั้นไม่แตกต่างจากที่วิธีคิดเดิมเท่าไหร่เนื่องจากปกติเราหารจากซ้ายไปขวาอยู่แล้ว

การเรียนรู้เทคนิคการคิดเลขในใจ ซึ่งวิธีที่ได้ประโยชน์มากคือการคำนวณเลขยกกำลัง ซึ่ง ดร.เบนจามินสอนวิธีคำนวณถึงเลข 5 หลัก แต่เขาทำได้ที่เลข 2 - 3 หลัก ซึ่งการคิดเลขในใจให้เร็วนั้นเขาบอกว่าต้องหมั่นฝึกฝนด้วยซึ่งวิธีตามหนังสือที่เขาแปลนั้นช่วยได้

สำหรับ ดร.เบนจามิน จบการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับปริญญาเอกจากมหาวิทยาลัยจอห์น ฮอปกินส์ และปัจจุบันเป็นศาสตราจารย์คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยฮาร์วีย์ มัดด์ สหรัฐฯ ซึ่งนอกจากสอนหนังสือแล้ว ยังแสดงมายากลโดยนำเทคนิคทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแสดงด้วย และได้รับยกย่องจากนิตยสารรีดเดอร์ ไดเจสต์ให้เป็น “พ่อมดคณิตศาสตร์อันดับหนึ่งของสหรัฐอเมริกา ”

เทคนิคการคูณเลขเร็ว

การหาค่ากำลังสองของเลขที่ลงท้ายด้วย 5

1. ให้เอา 5 ตัวท้ายคูณกันได้ 25 ตั้งเป็นผลลัพธ์หลักหน่วย และ หลักสิบไว้ก่อน
2. ให้เอาจำนวนที่อยู่หน้าเลข 5 คูณจำนวนที่มากกว่ามันอยู่ หนึ่ง คูณได้เท่าไร เขียนเป็นผลลัพธ์ต่อ 25 เป็นหลักร้อย , หลักพัน , หลักหมื่น ฯลฯ เป็นผลลัพธ์ ที่ถูกต้องและ รวดเร็ว

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

25 x 25 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 5 x 5 ได้ 25 ตั้งไว้ เอา 2 ตัวหน้า คูณกับ เลขที่มากกว่า 2 อยู่หนึ่ง (คือ เลข 3) 2 x 3 ได้ 6 ตั้งเป็นผลลัพธ์ ต่อจาก 25 เป็น 625 แสดงว่า 25 x 25 = 625

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

45 x 45 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 5 x 5 ได้ 25 ตั้งไว้ เอา 4 ตัวหน้า คูณกับ เลขที่มากกว่า 4 อยู่หนึ่ง (คือ เลข 5) 4 x 5 ได้ 20 ตั้งเป็นผลลัพธ์ ต่อจาก 25 เป็น 2,025 แสดงว่า 45 x 45 = 2,025

การคูณเลข 2 หลักที่จำนวนหน้าเท่ากัน จำนวนหลังบวกกันได้ 10

1. ให้เอา เลข ตัวท้ายคูณกัน ตั้งเป็นผลลัพธ์หลักหน่วย และ หลักสิบไว้ก่อน
2. ให้เอาตัวหน้าคูณกับจำนวนที่มากกว่ามันอยู่ หนึ่ง คูณได้เท่าไร เขียนเป็นผลลัพธ์ต่อเป็นหลักร้อย , หลักพัน , หลักหมื่น ฯลฯ เป็นผลลัพธ์ ที่ถูกต้อง และ รวดเร็ว
3. กรณีที่คูณกันแล้ว ได้ หลักหน่วย อย่างเดียว ให้ใส่เลขศูนย์ เป็นหลักสิบ (เช่น 1x9) ให้เขียน 09)

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

22x28 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 2x8 ได้ 16 ตั้งไว้ เอา 2 ตัวหน้า คูณกับ เลขที่มากกว่า 2 อยู่ หนึ่ง (คือ เลข 3) 2x3 ได้ 6 ตั้งเป็นผลลัพธ์ ต่อจาก 16 เป็น 616 แสดงว่า 22x28 = 616

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

31x39 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 1x9 ได้ 09 ตั้งไว้ เอา 3 ตัวหน้า คูณกับ เลขที่มากกว่า 3 อยู่ หนึ่ง (คือ เลข 4) 3x4 ได้ 12 ตั้งเป็นผลลัพธ์ ต่อจาก 09 เป็น 1,209 แสดงว่า 31x39 = 1,209

การคูณเลขสองหลักที่มีหลักสิบเป็นเลข 1 ทั้งตัวตั้งและตัวคูณ

1. ให้เอาเลข ตัวท้ายคูณกัน ตั้งเป็นผลลัพธ์หลักหน่วย ถ้าคูณกันเกิน 9 ให้ทดหลักสิบไว้ก่อน
2. เอาจำนวนหน้า บวกหลักหน่วยตัวหลัง และ บวกจำนวนที่ทดไว้ เขียนเป็นผลลัพธ์ต่อจากที่เขียนไว้เป็นหลักสิบ หลักร้อย ก็จะได้ผลลัพธ์ ที่ถูกต้อง และรวดเร็ว

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

17x15 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 7x5 ได้ 35 ใส่ 5 ทดไว้ 3 เอาจำนวนหน้าคือเลข 17 บวกหลักหน่วยตัวหลัง คือเลข 5 ได้ 17 บวก 5 บวกจำนวนที่ทดไว้ คือเลข 3 เท่ากับ 25 เขียนต่อจากหลักหน่วยเป็นผลลัพธ์ 255 แสดงว่า 17x15 = 255

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

<u>1</u>8x19 ก็ให้เอาตัวท้ายคือ 8x9 ได้ 72 ใส่ 2 ทดไว้ 7 เอาจำนวนหน้าคือเลข 18 บวกหลักหน่วยตัวหลัง คือเลข 9 ได้ 18 บวก 9 บวกจำนวนที่ทดไว้ คือเลข 7 เท่ากับ
34 เขียนต่อจากหลักหน่วยเป็นผลลัพธ์ 322 แสดงว่า 18x19 = 342

การคูณเลขสองหลักที่มีหลักหน่วยเป็นเลข 1 ทั้งตัวตั้งและตัวคูณ

1. เขียน 1 เป็นหลักหน่วยที่ผลลัพธ์ ตั้งไว้ก่อน
2. เอาเลข หลักสิบ บวกกับ หลักสิบ ได้เท่าไร เขียนเป็นผลลัพธ์ หลักสิบ ต่อจาก 1 ถ้าบวกกันได้เลขสองตัว ให้ทดตัวหน้าไว้ก่อน
3. เอาหลักสิบ คูณ หลักสิบ บวกกับตัวทด ได้เท่าไร เขียนผลลัพธ์ ต่อเป็น หลักร้อย หลักพันต่อไป ก็จะได้ผลลัพธ์ ที่ถูกต้อง และรวดเร็ว

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

71x51 ก็ให้เขียน 1 เป็นหลักหน่วยที่ผลลัพธ์ เลขหลักสิบ บวกเลข หลักสิบ (7+5) ได้ 12 ใส่ 2 เป็นหลักสิบ ทด 1 เอาเลข หลักสิบ คูณ เลข หลักสิบบวกกับตัวทด (7x5 + 1 = 36) เขียนต่อจากหลักหน่วยเป็นผลลัพธ์ 3621 แสดงว่า 71x51 = 3621

การคูณเลขที่มีตัวคูณเป็น 999...9

กรณีที่ 1 เมื่อเลย 999...9 เป็นตัวคูณที่มากกว่า

ตัวอย่าง เช่น 99 x 99 = 9801

999 x 999 = 998001

99 x 999999 = 98999901

158 x 9999 = 1579842

วิธีทำ คือ

1. ลดจำนวนสุดท้ายของค่าน้อยกว่าลง 1 เ ช่น 99 x 999 ลด99 เหลือ 98
2. นำ จำนวนมากที่สุดลบด้วยจำนวนในข้อ1 จะได้ 999-98 = 901
3. นำผลลัพธ์1ต่อท้ายด้วย 2 จะได้ 98901

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เมื่อ 158 x 9999 จะได้

1. 157
2. 9999-157 = 9842
3. ผลคูณ คือ 1579842

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> เมื่อ 675 x 99999 จะได้

1. 674
2. 99999-675 = 99324
3. ผลคูณ คือ 67499324

กรณีที่ 2 เมื่อเลย 999...9 เป็นตัวคูณที่น้อยกว่า

ตัวอย่าง เช่น 99 x 2589 = 256331

วิธีทำคือ

1. เติม0แทนจำนวนเลข9ต่อท้ายเช่น 258900 เนื่องจากมี 9 สองตัว
2. และนำผลข้อ1 ลบด้วยตัวมันเอง คือ 258900-2589 = 256331

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เมื่อ 999 x 1508 จะได้

1. 1508000
2. 1508000-1508 = 1506492

การคูณด้วยเลข 9 โดยใช้นิ้วมือสิบนิ้ว

1. แบมือ 2 มือ นิ้วโป้งมือซ้ายเป็นนิ้วที่1 นิ้วชี้มือซ้ายเป็นนิ้วที่2 นิ้วกลางมือซ้ายเป็นนิ้วที่3 นิ้วนางมือซ้ายเป็นนิ้วที่4 นิ้วก้อยมือซ้ายเป็นนิ้วที่5 นิ้วก้อยมือขวาเป็นนิ้วที่6 นิ้วนางมือขวาเป็นนิ้วที่7 นิ้วกลางมือขวาเป็นนิ้วที่8 นิ้วชี้มือขวาเป็นนิ้วที่9 นิ้วโป้งมือขวาเป็นนิ้วที่10
2. ตัวอย่างเช่น 9x3 ให้เราพับนิ้วที่3ลง เมื่อหักนิ้วลง ข้างๆนิ้วที่หักด้านซ้ายจะมีนิ้วอยู่2นิ้ว ข้างๆนิ้วที่หักด้านขวาจะมีนิ้วอยู่7นิ้ว แสดงว่า 9x3=27

การคูณเลขสองหลักด้วย 11

1. ตัวอย่างเช่น 45 x 11 เอาเลขที่สองหลักรวมกัน 4+5 = 9
2. นำเลขที่ได้ใส่ระหว่างกลางจะได้คำตอบ ดังนี้ 4 **9** 5 นั่น คือ 45 x 11 = 495

การหา ห.ร.ม. แบบยูคลิด โดยใช้ตาราง

วิธีการหา ห.ร.ม. หรือ ตัวหารร่วมมาก แบบยูคลิด (Euclid) โดยใช้ตาราง สามารถปฏิบัติได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เขียนตัวที่มี**ค่าน้อย**ไว้ทางด้านซ้ายใน**ตารางช่องซ้าย** และ ตัวที่มี**ค่ามาก**ไว้ทางด้านขวาใน**ตารางช่องขวา**
2. นำเลขที่มีค่าน้อยในตารางช่องซ้าย หาร ตัวเลขที่มีค่ามากในตารางช่องขวา เขียนผลหารด้านนอกทางขวาของตารางช่องขวา และตั้งลบเพื่อหาเศษแล้วเขียนเศษในตารางช่องขวา
3. นำเศษที่ได้ในช่องขวาไปหารตัวเลขที่อยู่ด้านลางสุดของช่องด้านซ้าย เขียนผลหารด้านนอกทางซ้ายของตารางช่องซ้าย และตั้งลบเพื่อหาเศษแล้วเขียนเศษในตารางช่องซ้าย
4. ซ้ำขั้นตอนที่ 3 และสลับระหว่างด้านซ้ายและขวาไปเรื่อยๆ จน ได้เศษจากการหารเป็น 0 (ศูนย์) ให้หยุด **ห.ร.ม. คือตัวหารตัวสุดท้ายที่ทำให้เศษการหารเป็น 0**

พิจารณาตัวอย่างการหา ห.ร.ม. ต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> การหา ห.ร.ม. ของ 42 และ 105 ปฏิบัติดังนี้

3	63	147	2	<---------(1)
	63	126		<---------(2)
	0	**21**		<---------(3)

(1) เอา 63 หาร 147 ได้ผลหาร 2 เศษ 21 แล้ว เขียนผลหาร 2 ไว้ข้างๆ ตัวตั้ง 147

(2) เขียนผลคูณ 63x3 = 126 ไว้ใต้ตัวตั้ง

(3) แล้วเอาเศษจากการหาร หรือ 147-126 = 21 เขียนต่อลงมา

(4) เริ่มการหารครั้งใหม่ โดยนำเศษที่ได้จากการหารครั้งที่ผ่านมาคือ 21ไปหาร ตัวหารคือ 63

(5) ทำขั้นที่ (1)-(3) สลับซ้ายขวาไปเรื่อย จนได้เศษเท่ากับ 0 แล้วตัวหารตัวสุดท้าย คือ ห.ร.ม.

<u>คำตอบ</u> ห.ร.ม. ของ 42 และ 105 คือ 21

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> การหา ห.ร.ม. ของ 83 และ 109 ปฏิบัติได้ดังตารางแสดงด้านล่าง

3	83	109	1
	78	83	
5	5	26	5
	5	25	
	0	**1**	

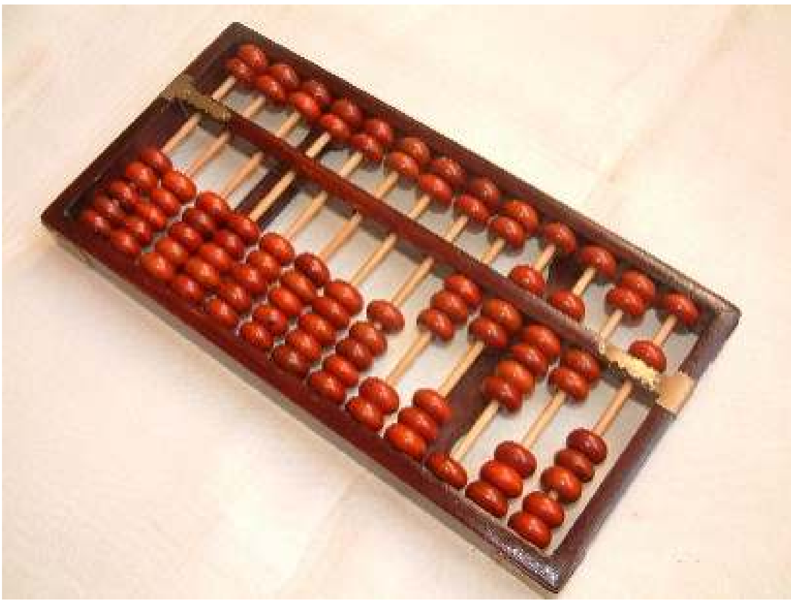
<u>คำตอบ</u> ห.ร.ม. ของ 83 และ 109 คือ 1

วิธีการใช้ลูกคิด

ลูกคิด (Abacus) เป็นเครื่องช่วยคำนวณเลขสมัยโบราณซึ่งถูกประดิษฐ์ พัฒนา และใช้อย่างแพร่หลายโดยชาวจีน ในทศวรรษที่ 11 ถึงแม้ว่าจะมีการจารึกของชาวมายาเกี่ยวกับลูกคิดตั้งแต่สมัยทศวรรษที่ 10 แต่อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีหลักฐานแน่ชัดเกี่ยวกับ การประดิษฐ์และการใช้ลูกคิดของชาวมายัน ปกติลูกคิดจีนจะประกอบด้วย ลูกกลม 2 กลุ่มด้วยกันดังนี้ คือ

1. กลุ่มบนจะมี 2 ลูก จะแทนค่าเป็นลูกละ 5
2. กลุ่มล่างจะมี 5 ลูก จะแทนค่าเป็นลูกละ 1

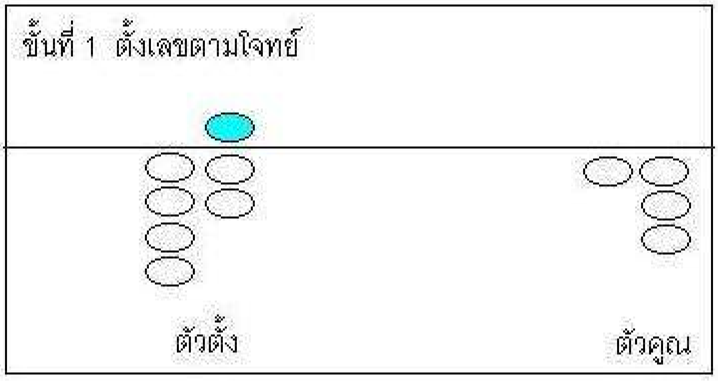
ส่วนจำนวนแถวแต่ละแถวจะแทนหลักหน่วย,สิบ,ร้อย,พัน,หมื่น,... ก็แล้วแต่ผู้ใช้ว่าจะใช้หลักใดแทนค่าหลักหน่วย หลักถัดไปก็จะแทนหลักสิบ ไปเรื่อยๆ การเริ่มต้น จะดันลูกกลมกลุ่มบนให้ติดข้างบน และกลุ่มล่างให้ติดข้างล่าง พอตอนจะเติมตัวเลขเช่น 2 ก็จะดีดลูกกลมกลุ่มล่างขึ้นมา 2 ลูก การคำนวณพอเติมตัวเลขครบ 5 ก็จะดีดกลุ่มบนลงมา 1 ลูกและดีดกลุ่มล่างลงติดขอบล่าง ถ้าครบหลักสิบหรือหลักถัดไป ก็จะดีดลูกกลมของหลักถัดไปมาแทน และดีดหลักที่ใช้อยู่ติดขอบบนและล่าง ดังแสดงในตัวอย่างในรูปที่ 1.1 สำหรับการแสดงค่า 37,925

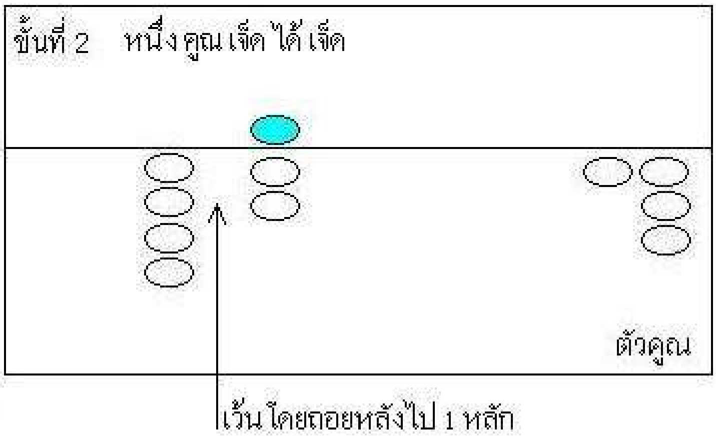


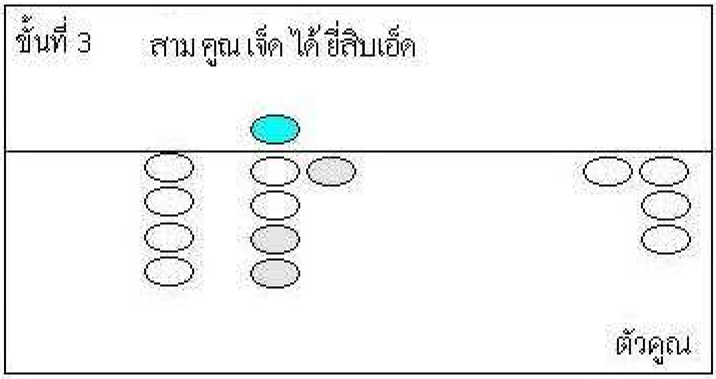
รูปที่ 1.1 รูปตัวอย่างของลูกคิดแสดงค่า 37,925

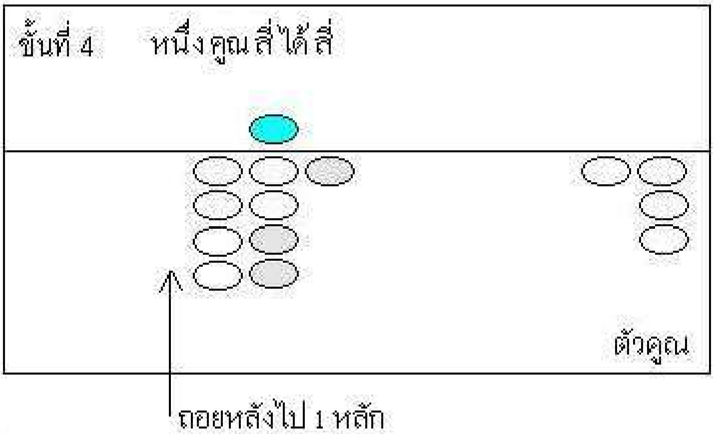
1. **การคูณลูกคิด** สามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

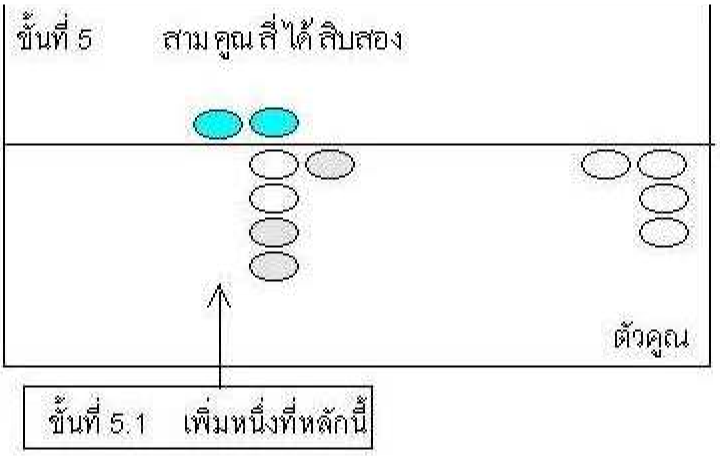
<u>ตัวอย่างที่ 1</u> การคูณ 47x13 = 611

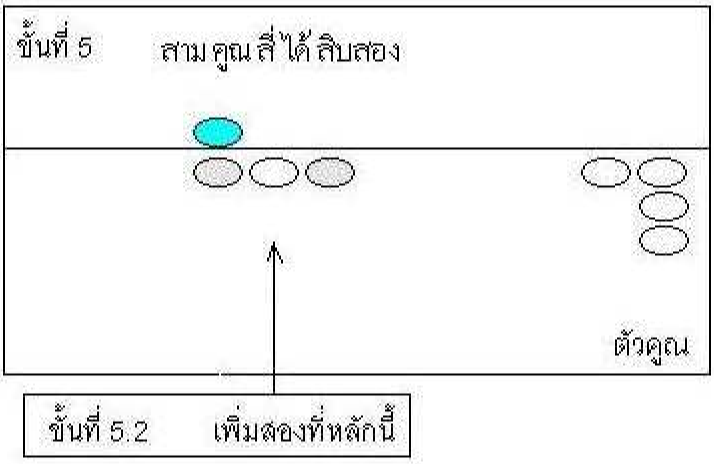







ขั้นที่ 4
หนึ่ง คูณ สี่ ได้ สี่
ตัวคูณ
ถอยหลังไป 1 หลัก

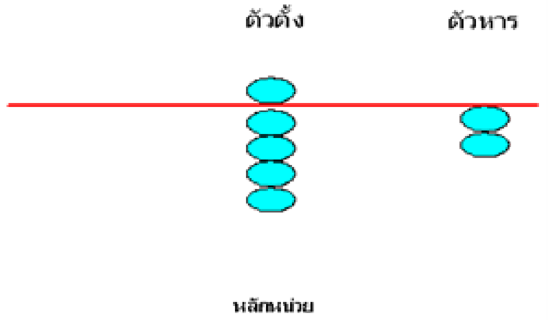

ขั้นที่ 5
สาม คูณ สี่ ได้ สิบสอง
ตัวคูณ
ขั้นที่ 5.1
เพิ่มหนึ่งที่หลักนี้


ขั้นที่ 5
สาม คูณ สี่ ได้ สิบสอง
ตัวคูณ
ขั้นที่ 5.2
เพิ่มสองที่หลักนี้

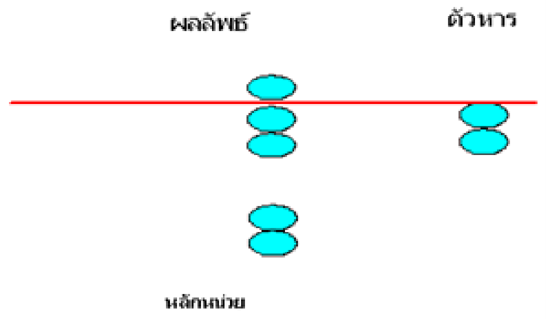
2. **การหารลูกคิด** สามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> การหาร 9/2 = 4.5

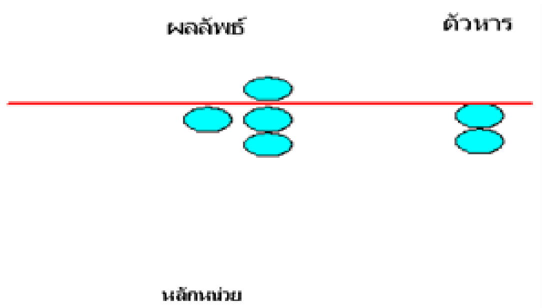
1.



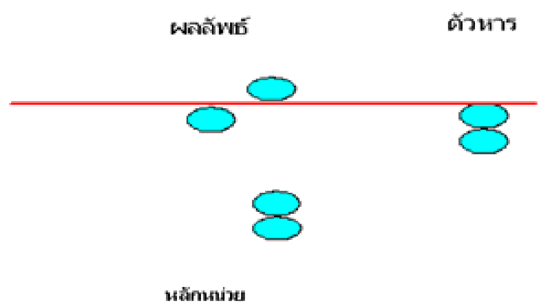
2.



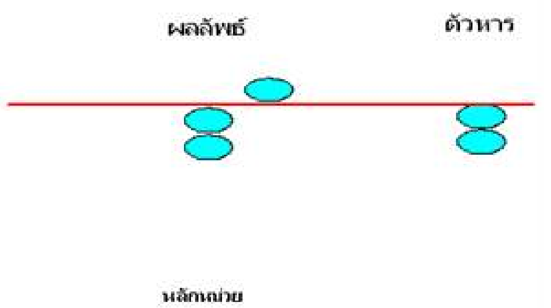
3.



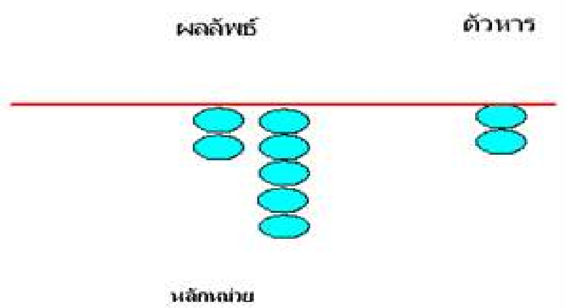
4.



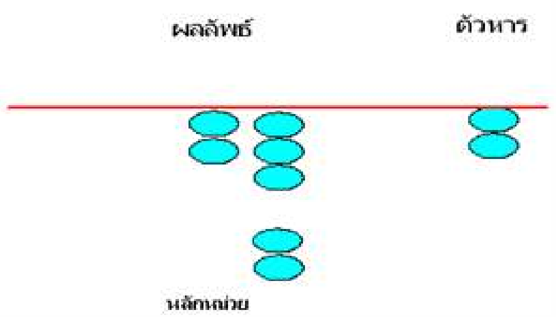
5.



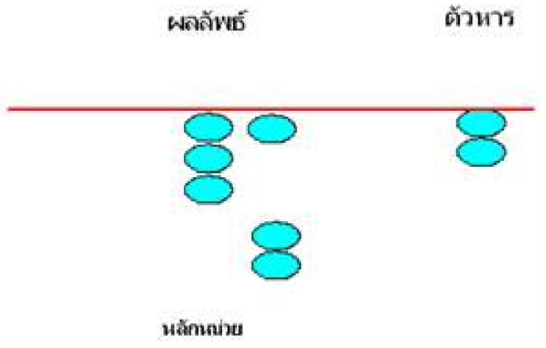
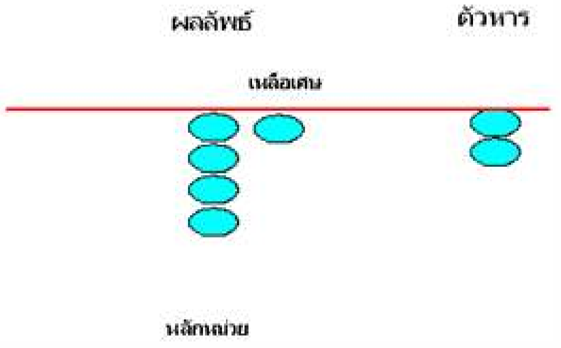
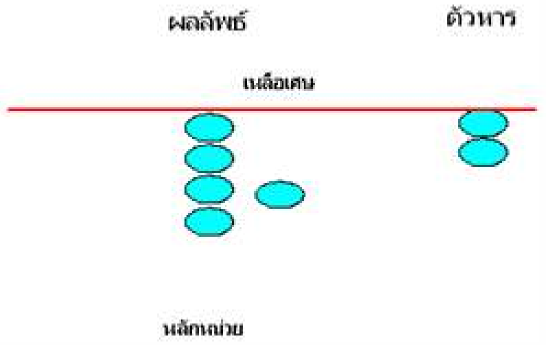
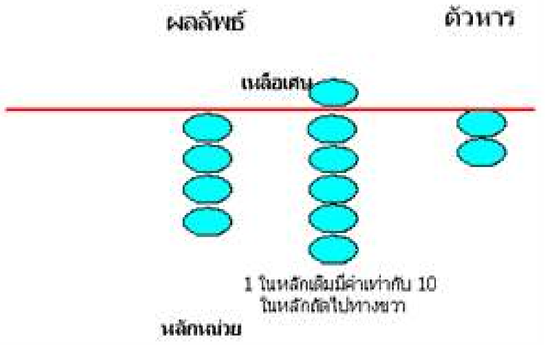
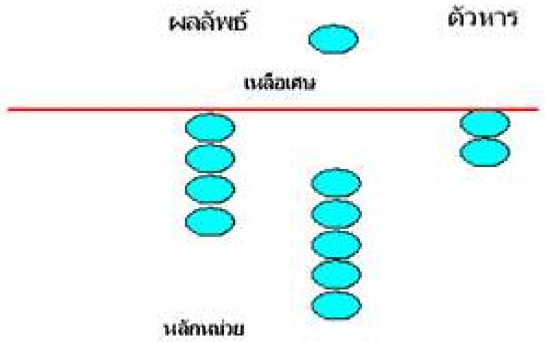
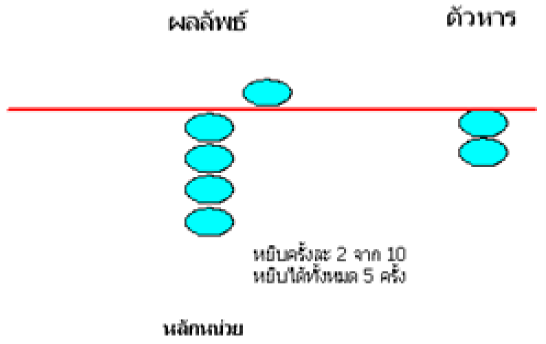
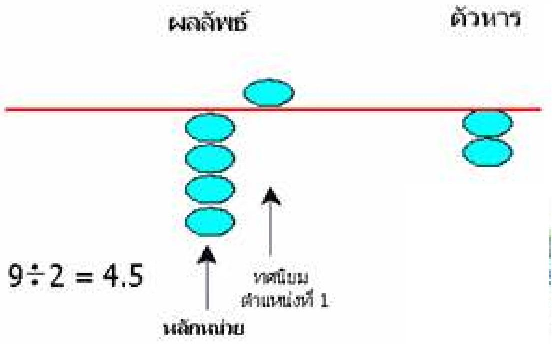
6.



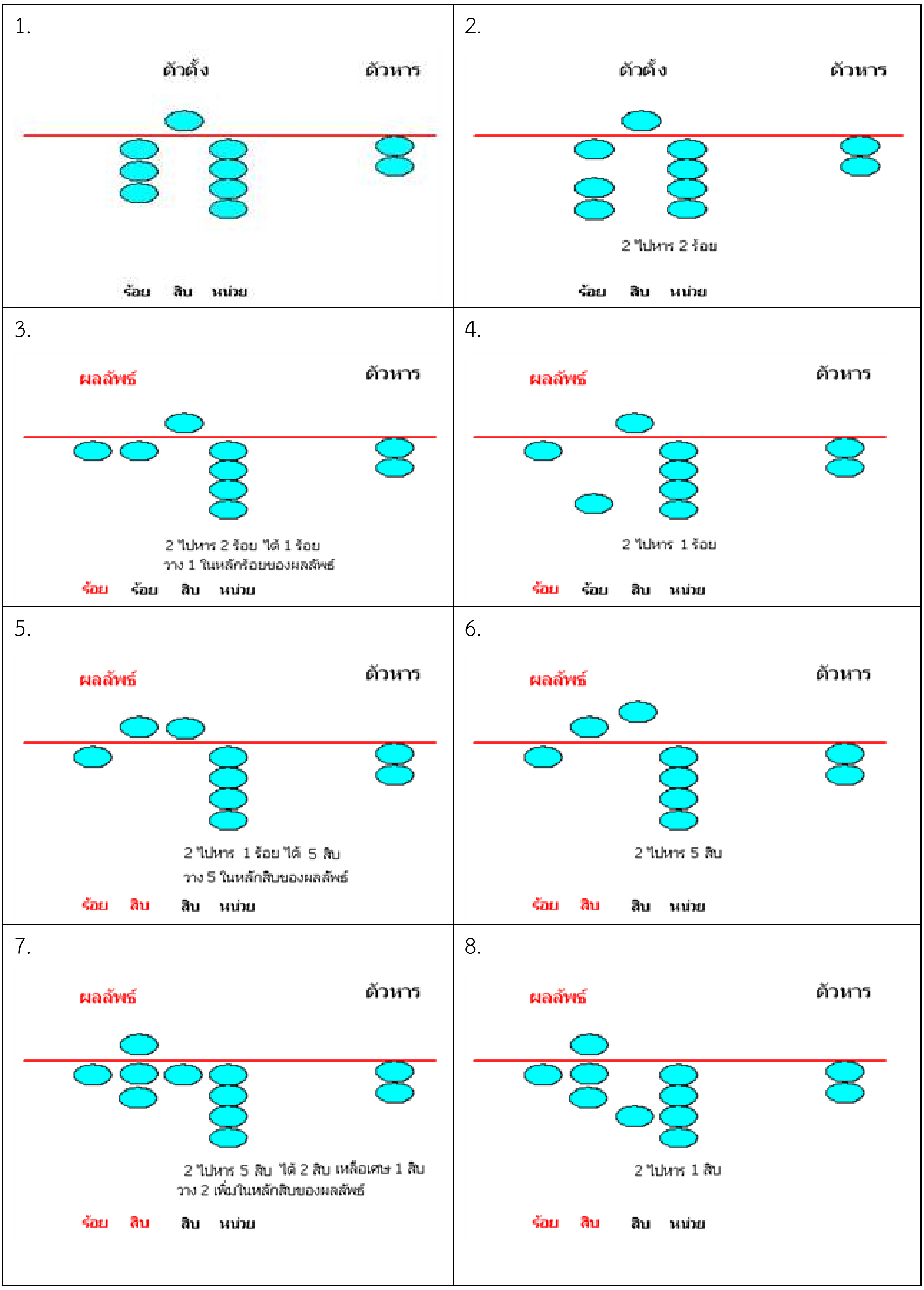
7.



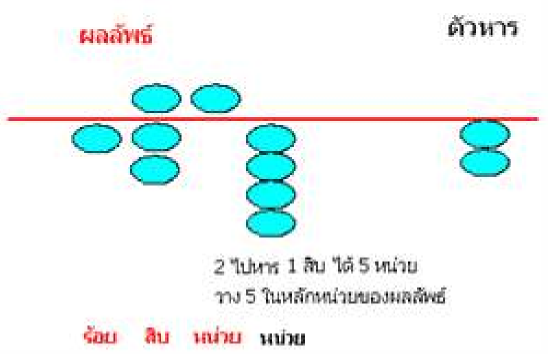
8.

9.  	10. 
11.  	12. 
13.  	14. 
15.  	16. 

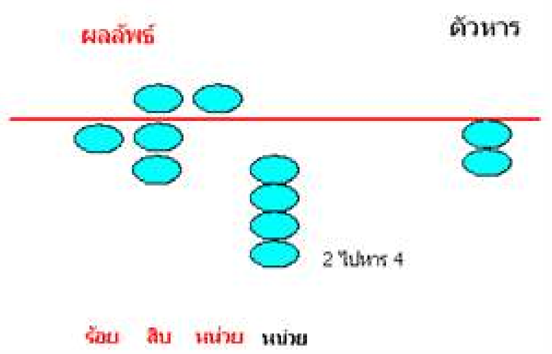
<u>ตัวอย่างที่ 3</u> การหาร 354/2 = 177



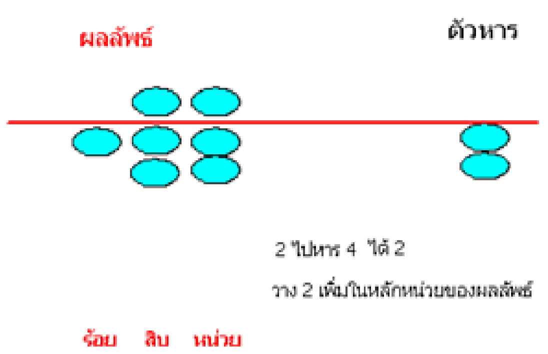
9.


ผลลัพธ์
ตัวหาร
2 ไปหาร 1 สิบ ได้ 5 หน่วย
วาง 5 ในหลักหน่วยของผลลัพธ์
ร้อย
สิบ
หน่วย
หน่วย

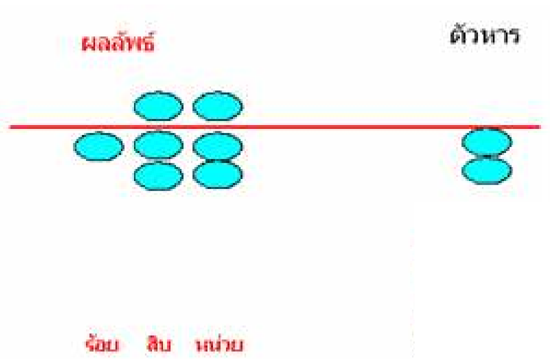
10.


ผลลัพธ์
ตัวหาร
2 ไปหาร 4
ร้อย
สิบ
หน่วย
หน่วย

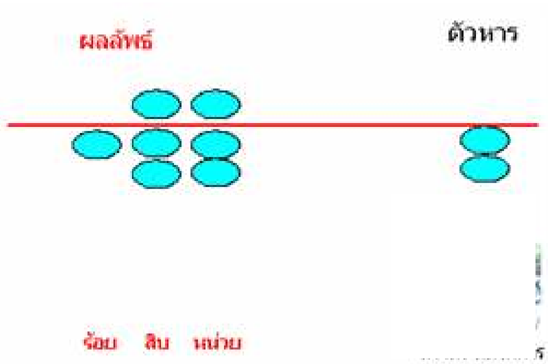
11.


ผลลัพธ์
ตัวหาร
2 ไปหาร 4 ได้ 2
วาง 2 เพิ่มในหลักหน่วยของผลลัพธ์
ร้อย
สิบ
หน่วย

12.

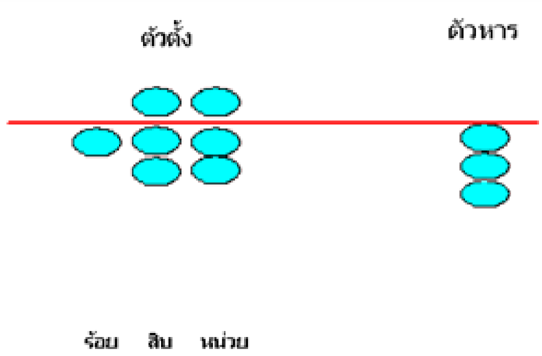

ผลลัพธ์
ตัวหาร
ร้อย
สิบ
หน่วย

13.

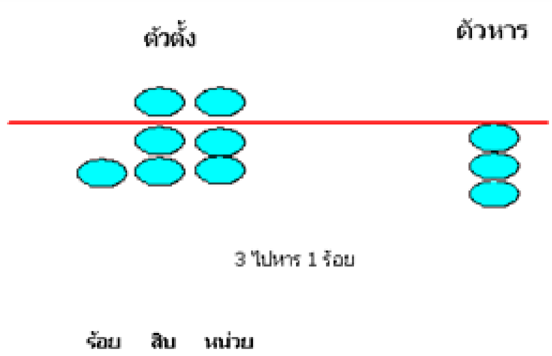

ผลลัพธ์
ตัวหาร
ร้อย
สิบ
หน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> การหาร 177/3 = 59

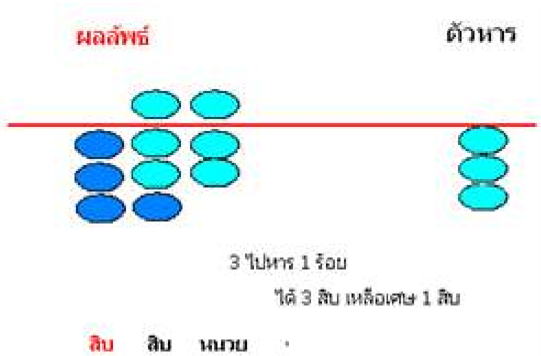
1.



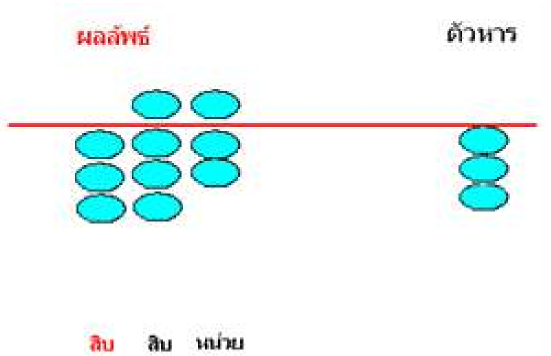
2.



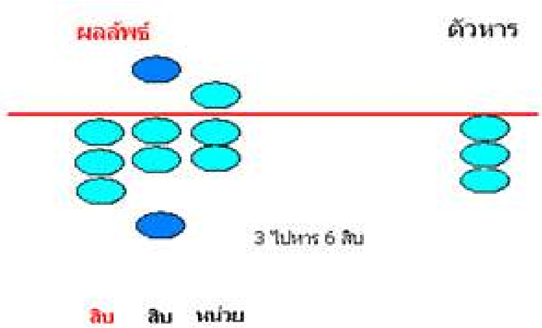
3.



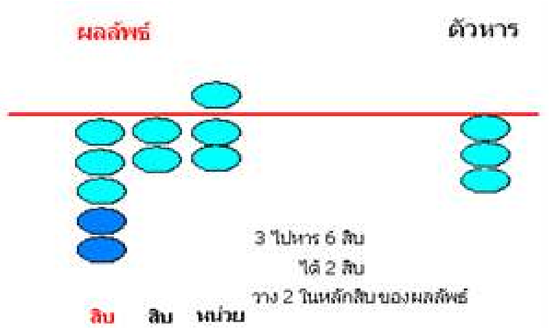
4.



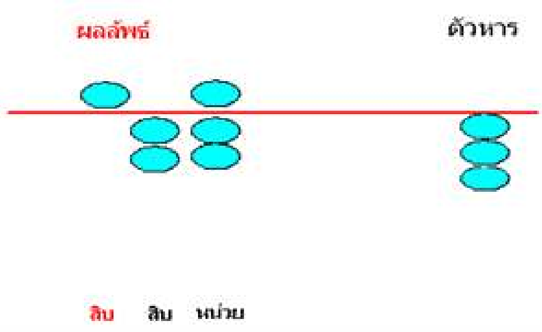
5.



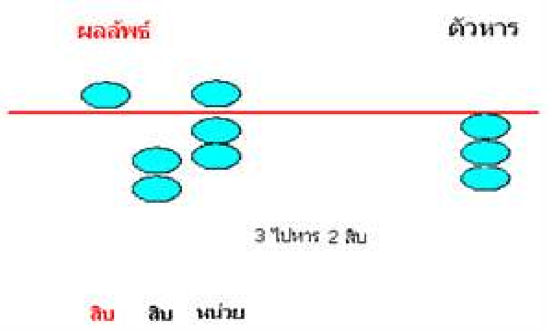
6.



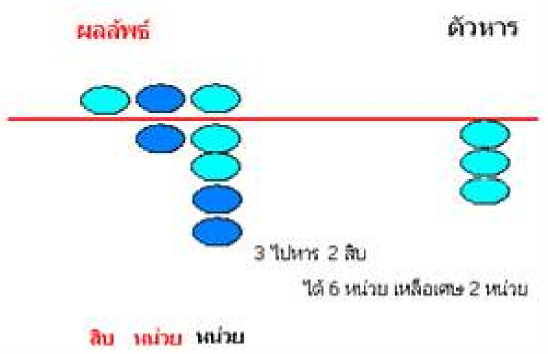
7.



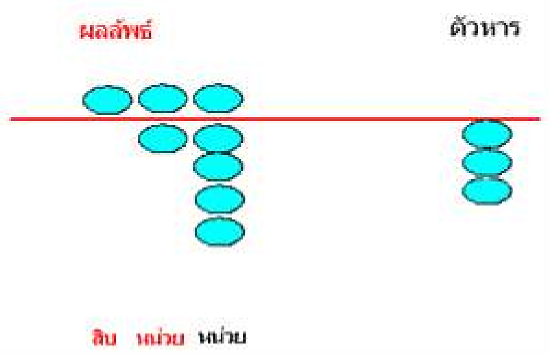
8.



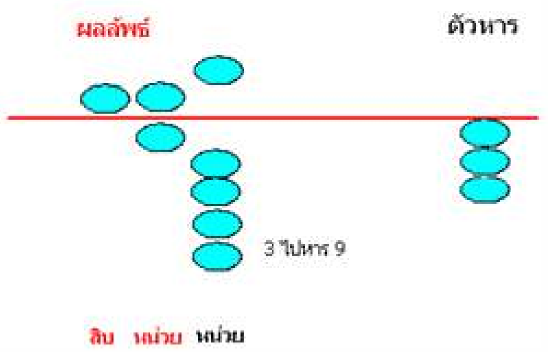
9.



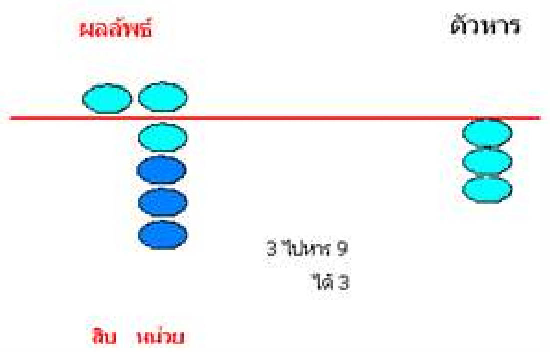
10.



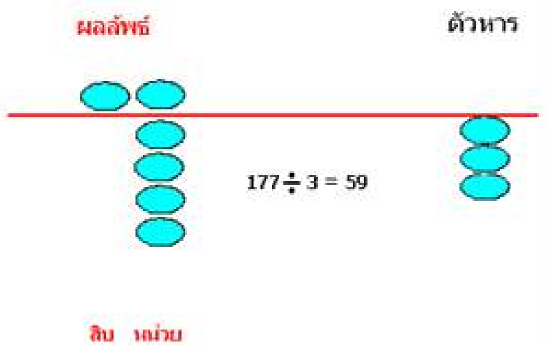
11.



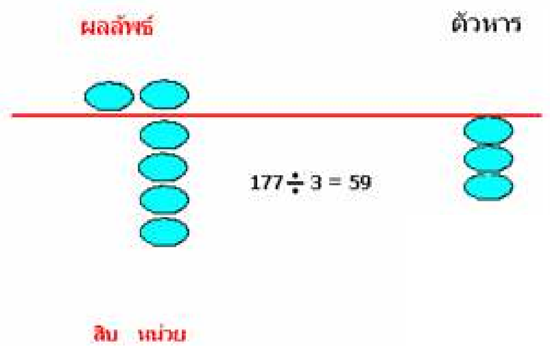
12.



13.

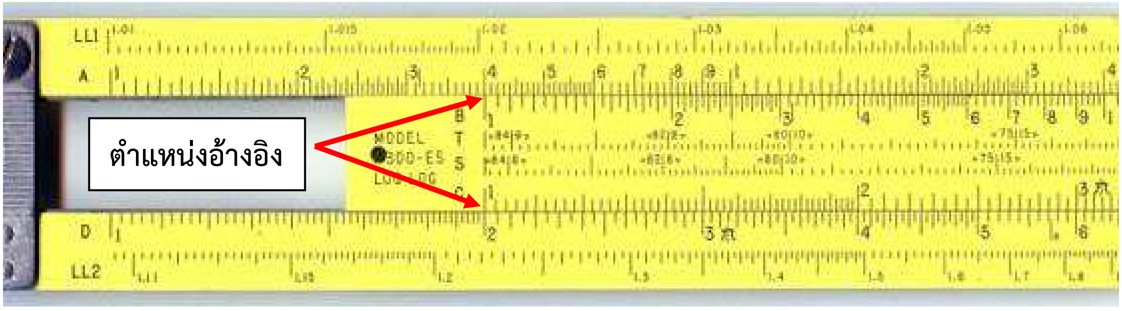


14.



วิธีการใช้สไลด์รูล

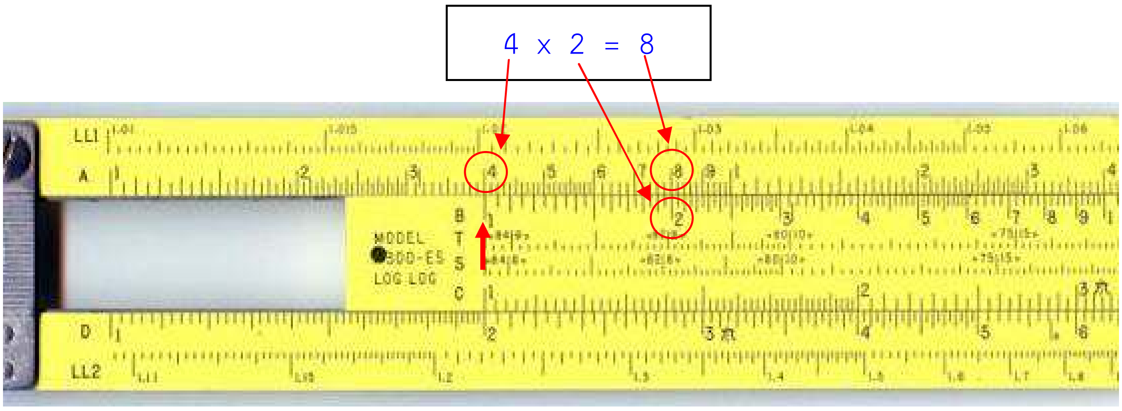
สไลด์รูล (slide rule) หรือ สลิปสติก (slipstick) ดังแสดงในรูปที่ 1.1 นับเป็นคอมพิวเตอร์แบบอนาลอกอย่างหนึ่ง มักประกอบด้วยแถบปรับได้ 3 แถบ และช่องสำหรับเลื่อน 1 ช่อง เรียกว่า "เคอร์เซอร์" (cursor) นิยมใช้กันทั่วไปในหมู่วิศวกรและสถาปนิก หรือนักศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ กระทั่งพ.ศ. 2513 เมื่อมีการผลิตเครื่องคิดเลขออกมา และมีราคาไม่แพง สไลด์รูปจึงกลายเป็นเทคโนโลยีที่ล้าสมัยไป สไลด์รูลนั้นมีประโยชน์สำหรับการคำนวณทางคณิตศาสตร์หลายอย่าง ทำให้สามารถหาค่าที่ต้องการได้อย่างรวดเร็วด้วยกัน



รูปที่ 1.1 สไลด์รูล

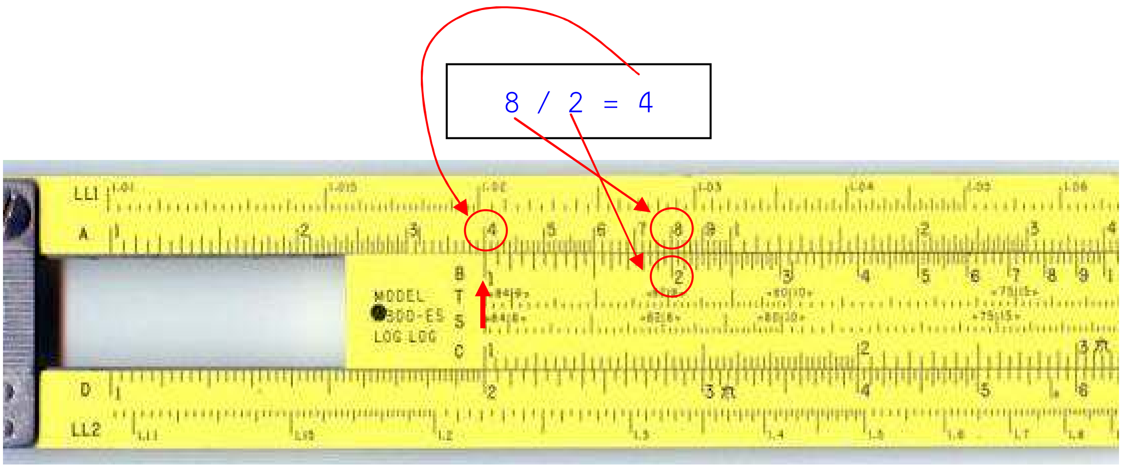
สไลด์รูลใช้สเกลอนาลอกแบบลอการิทึม โดยตำแหน่งอ้างอิงเริ่มต้นคือเลข 1 ซึ่งทำให้การบวกระยะทางบนสไลด์รูล จะทำให้เกิดการคูณ และการลบระยะทางบนสไลด์รูล จะทำให้เกิดการหาร และการที่สเกลบนและล่างต่างกันเท่าตัว จึงเป็นการยกกำลังสองหรือถอดรากที่สองก็ได้

1. **วิธีใช้สำหรับการคูณ** เมื่อต้องการคูณ 2 กับ 4 ให้ใช้จุดตั้งต้นของไม้บรรทัดอันล่างชี้ไปที่เลข 4 ของไม้บรรทัดอันบน เมื่ออ่านไม้บรรทัดอันล่างไปที่เลข 2 ตำแหน่งของไม้บรรทัดอันบนจะเป็นเลข 8



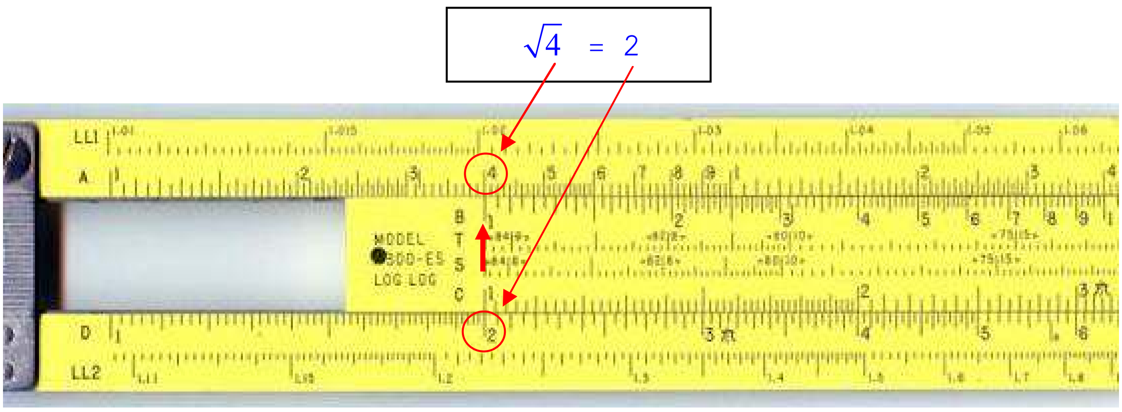
รูปที่ 1.2 การคูณโดยใช้สไลด์รูล

2. **วิธีใช้สำหรับการหาร** เมื่อต้องการหารเลข 8 ด้วย 2 ให้เลข 8 ของไม้บรรทัดอันบนวางบนเลข 2 ของไม้บรรทัดอันล่าง แล้วอ่านค่าบนไม้บรรทัดอันบนที่ตรงกับเลข 1 ของไม้บรรทัดอันล่าง จะได้ 4



รูปที่ 1.3 การหารโดยใช้สไลด์รูล

3. **วิธีใช้สำหรับการถอดรากที่สอง** เมื่อต้องการหารากที่สองของ 4 ให้ใช้ไม้บรรทัดแกนกลางเป็นตัวเลื่อนให้จุดตั้งต้นชี้ที่เลข 4 ของโครงอันบน เมื่อดูที่จุดตั้งต้นด้านล่างของไม้บรรทัดแกนกลาง จะชี้ที่เลข 2 นั่นคือ เลข 2 ด้านล่าง เป็นรากที่สองของเลข 4 ด้านบน



รูปที่ 1.4 การหารากที่สองโดยใช้สไลด์รูล

คณิตศาสตร์เกี่ยวกับวันที่ 29 กุมพาพันธ์

วันที่ 29 กุมภาพันธ์ นับเป็นที่มีความพิเศษเพราะมีได้แค่ 4 ปีครั้ง และวันที่ 29 ก.พ.แห่งปี 2008 นี้ก็พิเศษเข้าไปอีก เพราะวันที่ 29 ก.พ.นี้ ตรงกับวันศุกร์ นับเป็นครั้งแรกใน 28 ปี ถ้าคุณกำลังนั่งอ่านบทความนี้ คุณก็จะต้องเคยผ่านวันที่ 29 กุมภาพันธ์มาแล้วอย่างน้อย 3-4 รอบ ลองถามตัวเองว่าคุณรู้จัก “วันที่ 29 กุมภาพันธ์” ที่มา 4 ปีครั้งดีแค่ไหน

การคำนวณหาปีที่มีวันที่ 29 กุมภาพันธ์ มีกฎง่ายๆ คือ ปีคริสตศักราชที่หารด้วย 4 ลงตัว จะเป็นปีที่เดือนกุมภาพันธ์มี 29 วัน ตัวอย่างเช่น ปี ค.ศ. 2008, 2012, 2016 เป็นต้น และมีข้อยกเว้นคือ คือ ปีที่หารด้วย 100 ลงตัว แต่หารด้วย 400 ไม่ลงตัว ไม่ต้องเพิ่มวันที่ 29 กุมภาพันธ์เข้าไป ตัวอย่างเช่น ปี ค.ศ. 1700, 1800, 1900 เป็นต้น สำหรับปี 1600 หรือ 2000 ถึงจะหารด้วย 100 ลงตัว แต่ก็หารด้วย 400 ลงตัวด้วยเช่นกัน ดังนั้น จึงมีวันที่ 29 กุมภาพันธ์

หลักการทางวิทยาศาสต์และคณิตศาสตร์เบื้องหลังวันที่ 29 กุมภาพันธ์ มีดังนี้ โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ 1 รอบกินเวลา 365.242199 วัน หรือ 365 กับอีก ¼ วัน ซึ่งปีปกติที่มี 365 วันก็จะทำให้เวลาขาดไป ¼ วัน ดังนั้นจึงต้องทดไว้ เมื่อทดครบ 4 ปีก็จะได้เท่ากับ 1 วันพอดี จึงทำให้ต้องเพิ่ม 1 ปีมี 366 วันในทุกๆ 4 ปี และ ปีที่มีวันเพิ่มมานั้นเราเรียกกันว่า “อธิกสุรทิน” ซึ่งแปลว่า “วันเกิน” ขณะที่ฝรั่งใช้คำว่า “ลีป" (leap) ที่หมายถึงการกระโดดหรือข้าม (ซึ่งเรียกกันทั้ง ลีปเดย์-leap day ที่หมายถึงวันที่ 29 ก.พ. หรือ ลีปเยียร์-leap year ที่หมายถึงปีที่มีวันที่ 29 ก.พ.) และสัญญลักษณ์แห่งปีกระโดดที่พวกเขาใช้คือ "กบ"

คราวนี้ถ้าทุกๆ 4 ปีมีวันเกินมา 1 วัน เมื่อถึง 400 ปี ก็จะมีวัน 29 กุมภาพันธ์ เพิ่มขึ้น 100 รอบ หรือ 100 วัน แต่ถ้าคำนวณจากตัวเลข วันที่เกินในแต่ละปี คือ ประมาณ 0.242199 วัน เมื่อครบ 400 ปี จะมีวันเกิน $0.242199 \times 400 = 96.8796$ วัน หรือประมาณ 97 วัน ดังนั้นเพื่อให้ทุกๆ 400 ปี มีวันเพิ่มเพียง 97 วัน ไม่ใช่ 100 วัน จึงกำหนดให้วันที่หาร 100 ลงตัว แต่หาร 400 ไม่ลงตัว ไม่ต้องเพิ่มวันที่ 29 กุมภาพันธ์ ซึ่งทำให้การนับวันเวลาได้ใกล้เคียงกับวัฏจักรโลกและดวงอาทิตย์มากที่สุด

อย่างไรก็ดี ด้วยหลักการนี้เมื่อครบรอบ 10,000 ปี วันในปฏิทินจะผิดจากความเป็นจริงไปอีก 3 วัน ซึ่งจะต้องมีการแก้ไขในอนาคต แต่อีกตั้งหมื่นปีช่างแสนยาวไกล ปัญหานี้จึงยังไม่เป็นที่สนใจในการหาวิธีแก้

ข้อสังเกตที่น่าสนใจ คือ ปกติแล้ววันเริ่มปี หรือวันที่ 1 มกราคมของทุกปี จะตกในวันไล่ติดกันไปในสัปดาห์ แต่ละปี อย่าง 1 ม.ค.ปีที่แล้วตรงกับวันจันทร์ ส่วน 1 ม.ค.ปีนี้ตรงกับวันอังคาร ซึ่ง

เป็นวัฏจักรปกติ ดังนั้นการเริ่มต้นปีที่จะเรียงกันไปนั้น หากเป็นปีอธิกสุรทินมาคั่น วันเริ่มต้นของปีถัดไปก็จะเลื่อนไปอีก 1 วัน ตามตัวอย่างต่อไปนี้

1 มกราคม 2000 ตรงกับ วันเสาร์ (ปีอธิกสุรทิน)

1 มกราคม 2001 ตรงกับ วันจันทร์

1 มกราคม 2002 ตรงกับ วันอังคาร

1 มกราคม 2003 ตรงกับ วันพุธ

1 มกราคม 2004 ตรงกับ วันพฤหัสบดี (ปีอธิกสุรทิน)

1 มกราคม 2005 ตรงกับ วันเสาร์

1 มกราคม 2006 ตรงกับ วันอาทิตย์

1 มกราคม 2007 ตรงกับ วันจันทร์

หมายเหตุ อ้างอิงจากเวปไซต์ http://krukomnuan-kruanek.blogspot.com/

ปัญหาการเรียงส้มลงในกล่องสามมิติ

หลายๆ คนคงคาดไม่ถึงหากจะบอกว่า วิธีการที่แม่ค้าใช้ในการเรียงส้มขายนั้น นักคณิตศาสตร์ต้องใช้เวลาถึง 387 ปี จึงสามารถพิสูจน์ได้ว่ามันเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการบรรจุส้ม ลงกล่องให้ได้จำนวนมากที่สุด

ประวัติวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับปัญหาการเรียงวัตถุทรงกลมที่มีขนาดเท่ากันลงในภาชนะให้ได้จำนวนมากที่สุดนี้ถือกำเนิดเมื่อ **Sir Walter Releigh** ผู้เป็นนักสำรวจและนายทหารที่มีชื่อเสียงในรัชสมัยของพระราชินี Elizabeth ที่ 1 แห่งกรุงอังกฤษได้ถาม **Thomas Hariot** ว่านักคณิตศาสตร์มีสูตรคณิตศาสตร์ใดๆ หรือไม่ที่จะใช้บอกจำนวนลูกกระสุนปืนใหญ่ในกล่องได้อย่างรวดเร็ว แทนที่จะใช้วิธีนับตรงๆ หรือในมุมมองตรงกันข้าม หากมีการกำหนดขนาดของกล่องสำหรับบรรจุกระสุนปืนใหญ่มาให้ นักคณิตศาสตร์มีวิธีที่สามารถบรรจุลูกกระสุนปืนใหญ่ลงในกล่องให้ได้จำนวนมาก ที่สุด หรือไม่ Hariot จึงได้เขียนจดหมายถึง Johannes Kepler เพื่อถามปัญหานี้อัน Kepler ที่โลกรู้จักนั้นเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวออสเตรีย ที่ได้พบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์ต่างๆ ในสุริยจักรวาลรอบดวงอาทิตย์มีลักษณะเป็นวงรีหาใช่วงกลม แต่ Kepler นอกจากจะสนใจวิทยาศาสตร์แล้ว เขายังสนใจวิชาเรขาคณิตมากด้วย เขาจึงได้เริ่มศึกษาปัญหาอย่างจริงจังในปี ค.ศ.1611 และหลังจากที่ได้ทดลองเรียงลูกกระสุนปืนใหญ่หลายรูปแบบ Kepler ก็ได้คำนวณพบว่า หาก เขาเรียงให้ลูกกระสุนปืนใหญ่แต่ละลูกแตะสัมผัสลูกกระสุนอื่นๆ อีก 6 ลูก (แบบเดียวกับที่เขาเรียงลูกแดงเวลาจะเริ่มเล่นบิลเลียด) และเมื่อเรียงลูกกระสุนจนเต็มชั้นล่างแล้ว Kepler ก็ได้พบว่าในการเรียงชั้น 2 ก็ให้วางลูกกระสุนปืนใหญ่ลงเหนือรอยบุ๋มระหว่างลูกกระสุนที่วางเรียงรายอยู่ ชั้นล่าง ดังนั้น รูปแบบการเรียงของลูกกระสุนปืนในชั้นที่ 2 นี้ก็จะเหมือนการเรียงของลูกกระสุนชั้นแรกทุกประการ เพียงแต่ลูกกระสุนชั้น 2 นี้ได้เลื่อนตำแหน่งไปจากชั้นแรกประมาณครึ่งลูกเท่านั้นเอง และหากกระทำซ้ำสำหรับชั้นที่ 3, 4.... ไปเรื่อยๆ

Kepler ได้พบว่าการเรียงลูกกระสุนปืนใหญ่ลักษณะนี้ (นักคณิตศาสตร์เรียกการเรียงรูปแบบนี้ว่า **face centered cubic**) เป็นวิธีที่จะทำให้ความหนาแน่นในการบรรจุลูกกระสุนปืนใหญ่ลงกล่องมีค่าสูง สุด คือมากถึง 74.05% นั่นหมายความว่าจากปริมาตร 100 ลูกบาศก์เมตรที่กำหนดให้การเรียงทรงกลมแบบ face centered cubic จะทำให้เรามีปริมาตรเพียง 25.95 ลูกบาศก์เมตรเท่านั้น ที่เป็นที่ว่าง ซึ่งเป็นที่ว่างที่มีปริมาตรน้อยที่สุดแต่เราจะรู้ได้อย่างไรว่า วิธีที่ Kepler คิดนั้นเป็นวิธีที่ดีที่สุดในการเรียงทรงกลม ก็ในเมื่อรูปแบบการเรียงมีมากมายนับไม่ถ้วนคือทั้งที่เป็นระเบียบและที่ สะเปะสะปะ แล้วเราจะ

พิสูจน์ได้อย่างไรว่า รูปแบบทุกรูปแบบที่ใครๆ คิดนั้นต่างก็จะเรียงทรงกลมได้หนาแน่นน้อยกว่ารูปแบบที่ Kepler คิดทั้งสิ้น ตัว Kepler เองมั่นใจว่าวิธีของเขาเป็นวิธีที่ดีที่สุด แต่เขาไม่มีวิธีพิสูจน์นักฟิสิกส์เองก็รู้อยู่ในอกว่า วิธีที่ Kepler คิดนั้นมีประสิทธิภาพสูงสุดในการบรรจุทรงกลมลงกล่อง แต่ก็ไม่มีวิธีพิสูจน์อีกเช่นกัน ส่วนนักคณิตศาสตร์เองก็ยังไม่ยอมรับว่าวิธีของ Kepler นั้นดีที่สุดจนกว่าวิธีนี้ได้รับการพิสูจน์ว่าดีกว่าวิธีอื่นๆ ทั้งอสงไขยรูปแบบ ดังนั้นเราจึงไม่ต้องถามหรือสงสัยให้เสียเวลาว่าเหตุใดปัญหา Kepler จึงได้สยบสมองของอัจฉริยะต่างๆ ทางคณิตศาสตร์มานานกว่า 3 ศตวรรษความ ยากลำบากในการพิสูจน์ปัญหา Kepler นี้ ได้ทำให้ D. Hilbert นักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ของโลกคนหนึ่งในปี ค.ศ.1900 ติดอันดับปัญหานี้ว่าเป็น 1 ใน 23 ปัญหาที่ยากที่สุดในโลกเมื่อสมองของนักคณิตศาสตร์ไม่สามารถจะแก้ปัญหานี้ได้ในปี ค.ศ.1953 Laszio Fejes Toth ได้เสนอแนะให้มีการแก้ปัญหานี้โดยใช้คอมพิวเตอร์

ในปี ค.ศ.1975 Buckminster Fuller วิศวกรผู้ออกแบบโดมกลมแบบ geodesic อ้างว่าเขาสามารถพิสูจน์ปัญหา Kepler ได้ แต่ก็ได้รับการพิสูจน์ในเวลาต่อมาว่าวิธีพิสูจน์ของเขาไม่ถูกต้องปัญหา Kepler จึงเป็นปัญหาที่ยาก "พอๆ" กับปัญหา Fermat และแล้วในปี ค.ศ.1993 **Wu-Yi Hsiang** ก็ได้ทำให้วงการคณิตศาสตร์ตกตะลึงเมื่อเขาอ้างว่าเขาสามารถพิสูจน์ปัญหาของ Kepler ได้
แต่เมื่อผู้เชี่ยวชาญได้ตรวจรายงานการวิจัยของ Hsiang ที่มีความหนาร่วม 100 หน้า และได้พบว่ามีจุดบกพร่อง Hsiang จึงต้องกลับไปทบทวนวิธีพิสูจน์ใหม่ แต่ถึงแม้ Hsiang จะได้แก้ไขจุดบกพร่องแล้วและวิธีการพิสูจน์ของเขาในภาพรวมก็ยังหาได้เป็นที่ยอมรับไม่ เพราะผู้เชี่ยวชาญหลายคนมีความเห็นว่า Hsiang ได้ใช้สมมติฐานหลายข้อในการพิสูจน์ และ Hsiang ก็ยังไม่ได้พิสูจน์สมมติฐานเหล่านั้นว่ามันเป็นจริง เมื่อเป็นเช่นนี้ Hsiang ก็ต้องยอมรับว่า เขายังแก้ปัญหา Kepler ไม่ได้

ในเดือนสิงหาคม ค.ศ.1998 **Thomas C. Hales** นักคณิตศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัย Michigan ที่ Ann Arbor ในสหรัฐอเมริกาได้ประกาศว่าเขาสามารถพิสูจน์ปัญหา Kepler ได้ หลังจากที่ได้ขับสู้ปัญหานี้มานานร่วม 10 ปี งานวิจัยของ Hales ที่มีความยาว 250 หน้า ได้ถูกแบ่งออกเป็น 5 ตอน และใช้วิธีคำนวณหลายสไตล์ แต่วิธีหลักที่ Hales ใช้ก็คือวิธีของ **Laszlo Fejes-Toth** ซึ่งได้พิจารณาการจัดเรียงทรงกลมประมาณ 50 ลูกในทุกรูปแบบเท่าที่คอมพิวเตอร์จะคิดได้ และจากแต่ละรูปแบบ Hales ก็คำนวณอัตราส่วนระหว่างปริมาตรที่ว่าง : ปริมาตรทั้งหมด จากทรงกลมจำนวน 50 ลูกที่นำมาพิจารณานี้ ทำให้ Hales มีตัวแปร 150 ตัว ปัญหาธรรมดาๆ ใน 3 มิติ ก็เป็นปัญหาพระกาฬใน 150 มิติทันที และเมื่อเงื่อนไขบังคับความเป็นไปได้ของตัวแปรมีร่วม 2,000 เงื่อนไข การหาค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดของปริมาตรก็ยิ่งยากขึ้นเป็นทวีคูณวิธีการที่ Hales ใช้ในการคำนวณ ปัญหานี้จึงแตกต่างจากวิธีธรรมดาๆ ที่นักคณิตศาสตร์ทั่วไปใช้คือ Hales ใช้คอมพิวเตอร์ในการพิสูจน์ โดยเขาได้เขียนโปรแกรมคำนวณ และแสดงโปรแกรมทุกโปรแกรมใน Website เพื่อให้ผู้สนใจได้ศึกษา

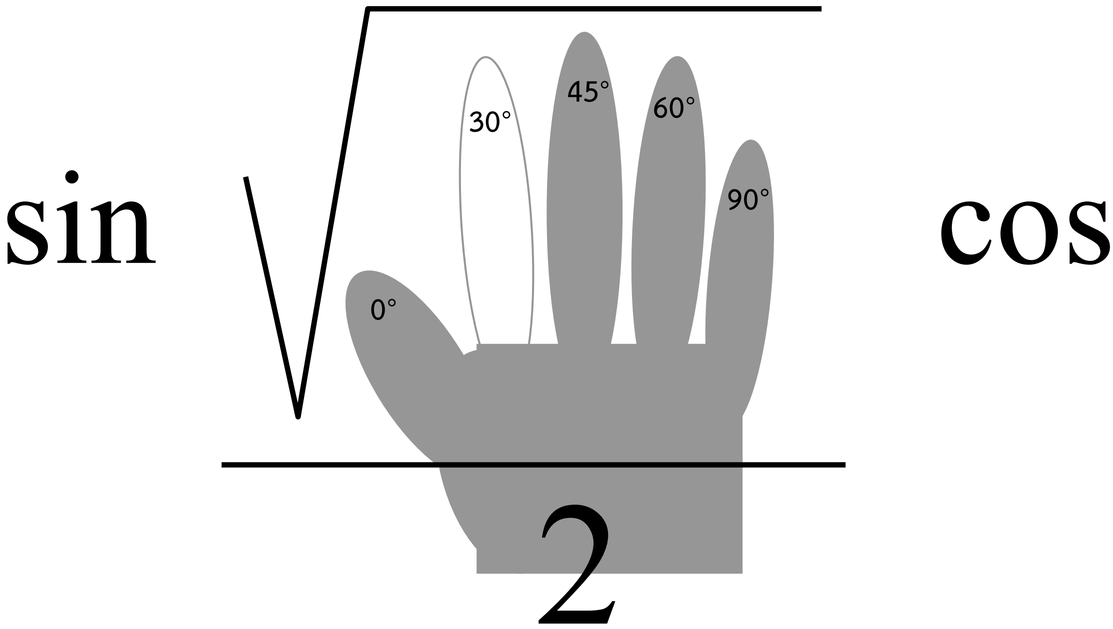
บัดนี้วงการคณิตศาสตร์ก็ได้ยอมรับแล้วว่า Hales เป็นผู้พิสูจน์ปัญหา Kepler ได้ แต่นักคณิตศาสตร์หลายท่านก็ยังไม่สุขใจกับวิธีพิสูจน์นี้นัก เพราะนักคณิตศาสตร์เหล่านี้อ้างว่าวิธีพิสูจน์ที่ดีนั้นนอกจากจะให้คำตอบแล้วยังต้องให้แนวคิดใหม่ด้วย แต่ Hales ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยใช้คอมพิวเตอร์ จึงไม่มีใครซึ้งในวิธีพิสูจน์ของเขาเลยดังนั้น Hales ตั้งใจไว้ว่าจะแก้ปัญหาการบรรจุทรงกลมลงกล่องใน 3 มิติให้เรียบร้อย จากนั้นก็จะขยับขยายการศึกษาปัญหา Kepler ไปใน 4, 5, 6....มิติ และก็ได้พบว่าวิธีการจัดส้มขนาดเท่าๆ กันลงกล่อง 4, 5, 6, 7, 8 มิตินั้น ง่ายกว่าการจัดส้มลงกล่อง 3 มิติ

เทคนิคจำค่า sine และ cosine โดยใช้ฝ่ามือ

เทคนิคการใช้มือช่วยจำค่าไซน์ (sine) และ โคไซน์ (cosine) ของมุมที่ใช้กันบ่อยๆ ในเรื่องตรีโกณมิติ หรือมุม 0°, 30°, 45°, 60°, และ 90° โดยในที่นี้จะกล่าวอ้างโดยใช้มือซ้าย (อาจจะใช้มือขวาแทนได้แต่มุมให้เรียงจากทางด้านซ้ายไปขวา) ทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. โดยหันฝ่ามือเข้าหาตัว และกำหนดนิ้วทางซ้ายสุด หรือนิ้วโป้ง แทนมุม 0° และเรียงตามนิ้วมาเป็น 30°, 45°, 60°, และ 90° ซึ่งจะจบที่นิ้วก้อยพอดีสำหรับมุม 90°
2. ถ้าต้องการหาค่า ไซน์ หรือ โคไซน์ ของมุมไหน ก็ให้หักนิ้วที่แทนมุมนั้นลง จำนวนนิ้วข้างซ้ายที่เหลือใช้หาค่าไซน์ และ ส่วนจำนวนนิ้วทางด้านขวาใช้หาค่าโคไซน์
3. นำจำนวนนิ้วถอดค่ารากที่ 2 แล้วหารด้วย 2 ก็จะได้ค่าไซน์ หรือ โคไซน์ ที่ต้องการ
4. ถ้าต้องการหาอัตราส่วนตรีโกณค่าอื่นๆ อีก 4 อัตราส่วน ให้ใช้ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนนั้นๆ กับ อัตราส่วนไซน์ หรือ โคไซน์

<u>ตัวอย่าง</u> สำหรับมุม 30° ให้หักนิ้วชี้เก็บ ทางด้านซ้ายมือจะเหลือ 1 นิ้ว ทำให้ $\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2}$ และทางขวาเหลือ 3 นิ้ว ทำให้ได้ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



การตัดเกรดโดยใช้ T- Score

การนำคะแนนดิบมาใช้ตัดเกรดทำไมจึงไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุดคะแนนดิบเป็นคะแนนที่ได้จากการสอบ หรือการทำกิจกรรมใดๆ ซึ่งเป็นคะแนนที่บ่งถึงปริมาณที่ทำได้จากทั้งหมดของผู้เรียน ไม่สามารถตีความหมายได้แน่ชัดว่ามีสภาพการเรียนรู้มากน้อยเพียงไร เช่น นิสิตคนหนึ่งสอบวิชาหนึ่งได้คะแนน 30 คะแนนจากทั้งหมด 80 คะแนน เราจะยังบอกไม่ได้ว่านิสิตคนนั้นเก่งหรืออ่อนอย่างไร จนกว่าจะนำคะแนนนี้ไปเปรียบเทียบกับคะแนนของคนอื่นๆ ที่เรียนวิชาเดียวกันกับเขา อีกทั้งคะแนนดิบเป็นคะแนนที่มีช่วงห่างแตกต่างกัน เช่น นาย ก. ได้ 60 นาย ข.ได้ 52 นาย ค. ได้ 41 นาย ง.ได้ 34 จะเห็นได้ว่า ช่วงคะแนนของ ก-ข=8, ข-ค=11,ค-ง=7 จากช่วงคะแนนที่ต่างกันนี้คะแนนดิบจึงไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบหรือคำนวณได้

วิธีการตัดเกรดที่นิยมใช้กันคือวิธีการตัดเกรดเชิงสมบูรณ์ หรือที่นิยมเรียกกันว่า การตัดเกรดแบบอิงเกณฑ์ และ วิธีการตัดเกรดเชิงสัมพัทธ์ หรือที่นิยมเรียกกันว่า การตัดเกรดแบบอิงกลุ่ม ได้แก่ “วิธีกำหนดโควตา” “วิธีหาช่องว่าง” “วิธีกำหนดช่วงคะแนนโดยใช้พิสัย” “วิธีกำหนดช่วงคะแนนโดยใช้ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน”

การตัดเกรดแบบอิงเกณฑ์ แนวคิดพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการตัดเกรดแบบอิงเกณฑ์คือ เกรดของนักเรียนแต่ละคนควรขึ้นอยู่กับความรู้ความสามารถที่เขามีอยู่ ไม่ควรขึ้นอยู่กับความรู้ความสามารถของบุคคลอื่นๆ จึงควรพิจารณาตัดสินบุคคลภายใต้เกณฑ์ที่กำหนดไว้ นั้นคือแม้จะเรียนและสอบเพียงคนเดียวก็ย่อมตัดสินผลการเรียนได้

การตัดเกรดแบบอิงกลุ่ม แนวคิดพื้นฐานจะตรงกันข้ามแบบอิงเกณฑ์ เพราะเกณฑ์ที่แท้จริงไม่ได้มีอยู่อย่างตายตัว แม้แต่กรณีที่มีผู้สอบตกสามารถสรุปได้หลายสาเหตุ เช่น อาจสรุปว่าเป็นเพราะเขาเรียนอ่อนมาก หรือเป็นเพราะเกณฑ์ที่กำหนดไว้นั้นสูงเกินได้ หรืออาจเป็นเพราะข้อสอบยากเกินไป หรือสรุปได้อย่างอื่น ดังนั้นการตัดเกรดโดยการนำคะแนนที่นักเรียนแต่ละคนได้รับมาเปรียบเทียบกันเองว่าใครเก่งอ่อนกว่ากัน(อิงกลุ่ม) จึงน่าจะสมเหตุสมผลมากกว่าการนำไปเทียบเกณฑ์ที่ตั้งไว้ เพราะสังคมมนุษย์ต้องแข่งขันตลอดเวลา คนเก่งจะต้องมีความสามารถเหนือผู้อื่น ซึ่งมีวิธีดังนี้

1. วิธีกำหนดโควตา แนวคิดพื้นฐานของวิธีนี้ก็คือมนุษย์มีคุณลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน เก่ง ปานกลาและอ่อน โดยเชื่อว่ามีการแจกแจงของคุณลักษณะเหล่านั้นเป็นโค้งปกติหรือเกือบจะเป็นโค้งปกตินั้นเอง

2. วิธีการหาช่องว่างเนื่องจากการวัดผลการเรียนรู้ความคลาเคลื่อนเกิดขึ้นได้เสมอ ดังนั้นเราจะมั่นใจว่านักเรียนว่านักเรียน 2 คนใดมีความสามารถแตกต่างกันก็ต่อเมื่อเขาได้คะแนนต่างกันมากพอจึงใช้ระยะห่างหรือช่องว่าง(Gap)ของคะแนนทั้งสองคนตัดสินว่ามีความสามารถที่แตกต่างกัน หาก พิจารณาในหลักการที่กล่าวมานั้นคงเห็นได้ว่าการใช้ “ช่องว่าง” เพียงอย่างเดียวคงไม่ช่วยให้เราตัดเกรดได้ แต่ควรใช้วิธีอื่นตัดเกรดก่อน จึงจะใช้วิธี “ช่องว่าง” เพื่อปรับเปลี่ยนเกรด เพราะ“ช่องว่าง” อาจไม่ได้เกิดจากความแตกต่างของความรู้ความสามารถที่แท้จริง แต่เกิดจากความบังเอิญมากกว่า

3. วิธีกำหนดช่วงคะแนนโดยใช้พิสัย หลักการตัดเกรดวิธีนี้ก็คล้ายกับการตัดแบ่งคะแนนออกเป็นท่อนๆท่อนละเท่าๆกัน ดังนั้นจึงต้องคำนวณหาระยะห่างระหว่างคะแนนสูงสุดและต่ำสุดก่อนและกำหนดจุดตัดขึ้น เพื่อทำการตัดเกรดต่อไป

4. วิธีกำหนดช่วงโดยใช้ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน หลักการตัดเกรดวิธีนี้จะใช้การกระจายคะแนนมาใช้พิจารณาร่วมด้วย เมื่อใครได้คะแนนใกล้เคียงกับคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มก็แสดงว่ามีความสามารถปานกลางเท่านั้น ทั้งนี้จึงสามารถใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน(Standard Deviation) กับความคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มมาเป็นดัชนีบ่งชี้ถึงระดับความเก่ง-อ่อนได้

วิธีที่ดีในการตัดเกรดควรต้องนำหลักทางการสถิติและการตัดเกรดแบบอิงกลุ่มมาช่วยกัน นั้นคือการกำหนดช่วงคะแนนไว้ในรูปของคะแนนแปลงรูปเชิงเส้นตรง(Linear Transformation) เช่นคะแนนซี(Z-Score)และคะแนนที(T-Score)

การตัดเกรดโดยใช้ T- Score

คะแนนที (T-Score) เป็นคะแนนที่นำคะแนนดิบมาผ่านขั้นตอนทางสถิติ ทำให้สามารถวัดได้ว่าผู้เข้าสอบมีความสามารถเป็นอย่างไรเมื่อเทียบกับผู้เข้าสอบ(ในวิชาเดียวกัน)ทั้งหมด สามารถบอกได้มีคนเก่งกว่าเรากี่คน และเราทำคะแนนชนะผู้อื่น อยู่กี่คน ซึ่งเป็นคะแนนมาตรฐานเช่นเดียวกับคะแนนที แต่ทีปกตินี้จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ซึ่งปกติคะแนนดิบที่เราได้มานั้นมักจะไม่เป็นโค้งปกติถ้าหากเราแปลงเป็นคะแนนที โดยใช้สูตร T=10Z+50 การแจกแจงของคะแนนก็ยังเป็นรูปเดิมหรือรักษาเค้าโครงของคะแนนดิบทุกประการ ในปัจจุบันวิธีการตัดเกรดแบบใช้คะแนนทีเป็นวิธีที่สมบูรณ์และดีที่สุดเท่าที่ในปัจจุบันจะมีได้ โดยหลักการเป็นการตัดสินวิธีการใช้คะแนนT-Scoreเป็นสิ่งที่ถูกในหลักวิชา เนื่องจากได้นำหลักทางสถิติมาใช้ในการคำนวณเข้าใจง่ายและทั้งนี้คะแนนที-ปกติมีพื้นฐานมาจากคะแนนมาตรฐานและการกระจายโค้งปกติ

ถ้านำวิธี t ในการคำนวณคะแนนที เราจะหาคะแนนซี (Z score)ก่อนโดยคะแนนซีของคะแนนค่าใด ๆ คำนวณได้จากสูตร

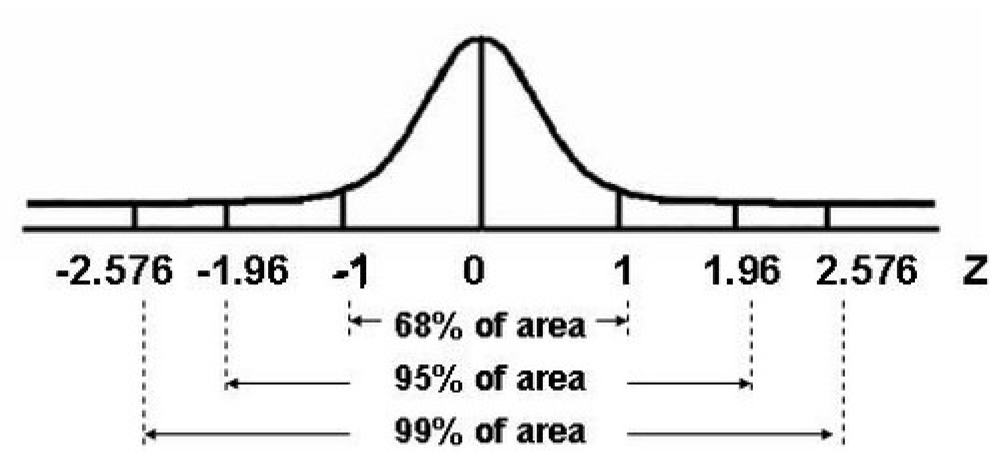
$$\text{คะแนนซี (Z score) ของคะแนนใด ๆ} = \frac{\text{คะแนนนั้น - ค่าเฉลี่ยของคะแนนในกลุ่ม}}{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}$$

คะแนนใดที่มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยจะได้คะแนนซี เท่ากับศูนย์ คะแนนที่มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยจะได้คะแนนซีที่มีค่าติดลบ ดังนั้นเราจึงนิยมแปลงคะแนนซี ให้เป็นคะแนนที เพื่อให้พ้นค่าติดลบเหล่านี้โดยใช้สูตร

คะแนนที่ (T score) ของคะแนนใด ๆ = คะแนนซี x 10 + 50

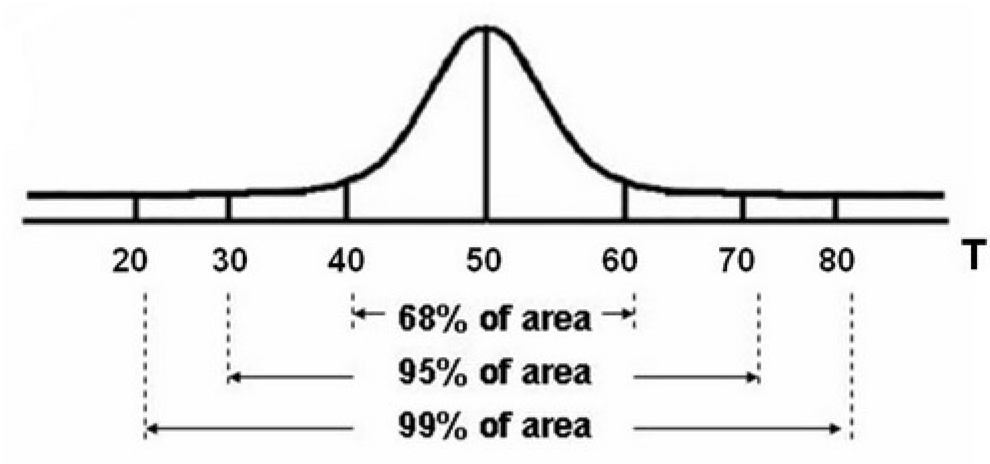
คะแนนที จึงเป็นการแปลงคะแนนของกลุ่ม โดยทำให้มีคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มเป็น 50 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 นั่นเอง คะแนนสอบทั้งกลุ่มจึงมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 100

คะแนนซี (Z-Score)



หาได้จากสูตร $z = \frac{x - mean}{SD}$ โดยที่ X คือคะแนนดิบของแต่ละคน Mean คือคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม SD คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่ม (Standard Deviation ตัวย่อ คือ S หรือ SD) Mean=0, SD=1

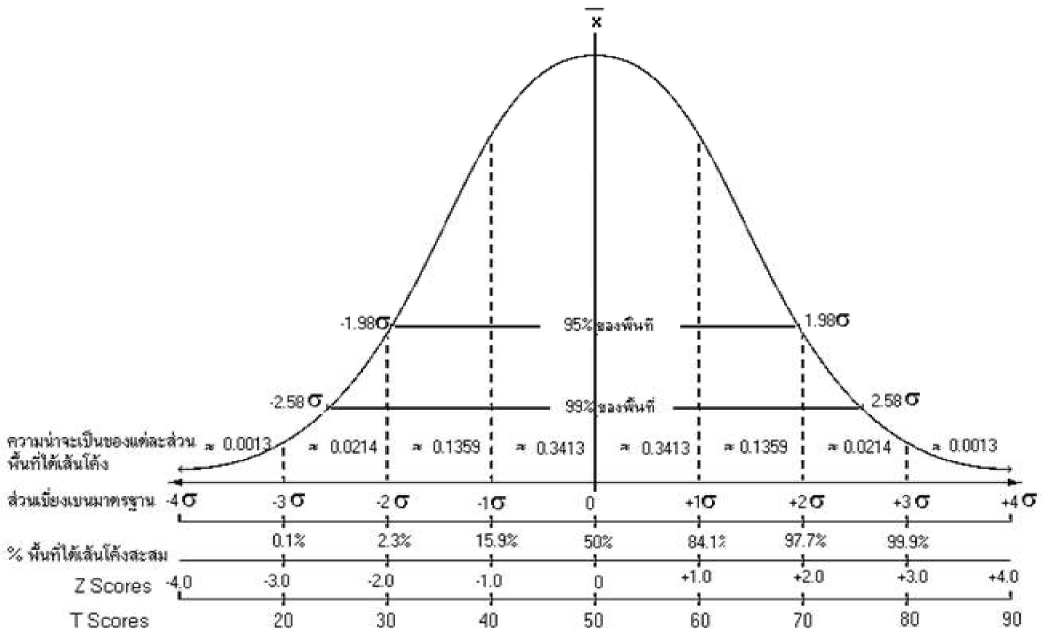
คะแนน Linear T-Score



หาได้จากสูตร $T = 10Z + 50$ นั่นคือต้องหาค่า Z ก่อน แล้วจึงได้ค่าคะแนน T (ทั้งนี้เพื่อแก้ปัญหาในการตีความคะแนน Z ซึ่งบางส่วนมีคะแนนน้อยกว่า 0 จึงเป็นค่าติดลบ) Mean=50, SD=10

การตัดเกรด

การกระจายของความถี่ของคะแนนผู้เข้าสอบจะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน % พื้นที่ใต้เส้นโค้งสะสม คะแนน Z และคะแนน T แสดงเปรียบเทียบ ได้ดังรูป



ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะกรณีแบ่งการตัดเกรดออกเป็น 5 เกรด คือ A, B, C, D และ F (ถ้าจะแบ่งเกรดให้เป็น A, B+, B, C+, C, D+, D และ F เพียงซอยย่อยบริเวณของแต่ละเกรดออกเป็น สองส่วนเท่านั้น)

ขั้นตอนการคิดคะแนนทีปกติ

จะขอยกตัวอย่างประกอบคำอธิบายไปพร้อม ๆ กันเลยดังนี้

ในการสอบวิชาหนึ่ง จำนวนนักศึกษา 20 คน ได้คะแนนสอบ ดังนี้

24, 20, 15, 12, 24, 27, 14, 18, 20, 19, 23, 20, 21, 20, 23, 24, 25, 20, 17, 15

การแปลงคะแนนดิบให้เป็นคะแนนทีปกติ ให้ทำตามลำดับขั้นดังนี้

1. เขียนคะแนนดิบเรียงจากมากไปหาน้อย ให้คะแนนสูงสุดอยู่ด้านบน หาความถี่ของคะแนนแต่ละคะแนนดังรูปที่ 1

คะแนนดิบ	Tally	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม (cf)
27	/	1	
25	/	1	
24	///	3	
23	//	2	
21	/	1	
20	/////	5	
19	/	1	
18	/	1	
17	/	1	
15	//	2	
14	/	1	
12	/	1	

2. หาความถี่สะสม โดยการนำความถี่ของคะแนนนั้น รวมกับความถี่สะสมของคะแนนที่อยู่ต่ำกว่าตัวมันเอง 1 บรรทัด จะเห็นว่าความถี่สะสมบรรทัดบนสุด จะมีค่าเท่ากับจำนวนคนที่เข้าสอบ

คะแนนดิบ	Tally	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม (cf)
27	/	1	20
25	/	1	19
24	///	3	18
23	//	2	15
21	/	1	13
20	/////	5	12
19	/	1	7
18	/	1	6
17	/	1	4+1 = 5
15	//	2	2+2 = 4
14	/	1	1+1 = 2
12	/	1	1

3. คำนวณหาค่า (cf + 0.5 f) ค่านี้จะนำไว้ใช้หา Percentile ของคะแนน ความหมายของสูตรนี้คือ ให้นำความถี่สะสมของคะแนนบรรทัดที่อยู่ต่ำกว่า 1 บรรทัด + ครึ่งหนึ่งของความถี่ของคะแนนในบรรทัดนั้น

คะแนนดิบ	Tally	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม (cf)	(cf + 0.5f)
27	/	1	20	19.5
25	/	1	19	18.5
24	///	3	18	16.5
23	//	2	15	14
21	/	1	13	12.5
20	/////	5	12	9.5
19	/	1	7	6.5
18	/	1	6	5.5
17	/	1	5	4.5
15	//	2	2+0.5(2)= 4	3
14	/	1	1+0.5(1)= 2	1.5
12	/	1	0 + 0.5(1)= 1	0.5

0

คะแนนดิบ	Tally	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม (cf)	(cf + 0.5f)	คะแนน T ปกติ
27	/	1	20	19.5	70
25	/	1	19	18.5	64
24	///	3	18	16.5	59
23	//	2	15	14	55
21	/	1	13	12.5	53
20	/////	5	12	9.5	49
19	/	1	7	6.5	45
18	/	1	6	5.5	44
17	/	1	5	4.5	42
15	//	2	4	3	40
14	/	1	2	1.5	36
12	/	1	1	0.5	30

ในโปรแกรมคำนวณคะแนนทีปกตินี้ ได้เพิ่มช่อง Percentile ซึ่งจะเป็นตัวบอกว่าผู้เข้าสอบมีตำแหน่งของคะแนนเหนือกว่าผู้สอบทั้งหมดอยู่เท่าไร เป็นพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติตรงตำแหน่งผู้เข้าสอบนั้นอยู่

$$\text{พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ} = \frac{(cf + 0.5\,f)}{\text{จำนวนผู้เข้าสอบ}}$$

เมื่อนำพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ คูณด้วย 100 จะได้ค่า Percentile ของคะแนนของผู้เข้าสอบรายนั้น เมื่อทราบพื้นที่ใต้เส้นโค้ง เราสามารถหาย้อนกลับได้ว่า คะแนน Z เท่าใดทำให้เกิดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ค่าดังกล่าว สมการของเส้นโค้งปกติหาได้จาก

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

เมื่อได้ค่า คะแนน Z แล้ว หาคะแนน T ปกติ ได้จาก

$$T = 10^* Z + 50$$

เมื่อเพิ่มคอลัมน์ Percentile จะได้ดังตาราง

คะแนนดิบ	Tally	ความถี่ (f)	ความถี่สะสม (cf)	(cf + 0.5f)	Percentile	คะแนน T ปกติ
27	/	1	20	19.5	97.50	70
25	/	1	19	18.5	92.50	64
24	///	3	18	16.5	82.50	59
23	//	2	15	14	70.00	55
21	/	1	13	12.5	62.50	53
20	/////	5	12	9.5	47.50	49
19	/	1	7	6.5	32.50	45
18	/	1	6	5.5	27.50	44
17	/	1	5	4.5	22.50	42
15	//	2	4	3	15.00	40
14	/	1	2	1.5	7.50	36
12	/	1	1	0.5	2.50	30

เมื่อผู้ใช้เลือกตัดเกรด A, B+, B, C+,C, D+,D, F

หาพิสัย (Range) ของคะแนน ในที่นี้คือ

(คะแนนทีปกติค่าสูงสุด – คะแนนทีปกติค่าต่ำสุด)/ จำนวนเกรดที่จะตัด = (70 -30) /8 = 5

เมื่อแปลงคะแนนดิบเป็นคะแนนทีปกติ เรียบร้อยแล้วต่อไปก็เข้าสู่ขั้นตอนการตัดเกรด

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 +(3 *พิสัย) จะได้เกรด A

50 + 3*5 = 65 คะแนน T ปกติ 65 ขึ้นไปจึงจะได้ A

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 + (2* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 + (3* พิสัย) จะได้เกรด B+

50 + 2*5 = 60 คะแนน T ปกติ 60 ถึง 65 จะได้ B+

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 + (1* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 + (2* พิสัย) จะได้เกรด B

50 + 1*5 = 55 คะแนน T ปกติ 55 ถึง 60 จะได้ B

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 + (0* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 + (1* พิสัย) จะได้เกรด C+

50 + 0*5= 50 คะแนน T ปกติ 50 ถึง 55 จะได้ C+

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 –(1* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 + (0* พิสัย) จะได้เกรด C

50 – 1*5 = 45 คะแนน T ปกติ 45 ถึง 50 จะได้ C

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 –(2* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 - (1* พิสัย) จะได้เกรด D+

50 – 2*5 = 40 คะแนน T ปกติ 40 ถึง 45 จะได้ D+

คะแนนทีปกติ เท่ากับหรือมากกว่า 50 –(3* พิสัย) แต่ไม่ถึง 50 - (2* พิสัย) จะได้เกรด D

50 – 3*5 = 35 คะแนน T ปกติ 35 ถึง 40 จะได้ D

คะแนนทีปกติ ที่น้อยกว่า 50 –(3* พิสัย) จะได้เกรด F

คะแนนทีปกติที่น้อยกว่า 35 จะติด F

RawScore	Frequency	Cum Freq	Percentile	T Score	Grade
27.00	1	20	97.50	69.50	A
25.00	1	19	92.50	64.40	A
24.00	3	18	82.50	59.40	B+
23.00	2	15	70.00	55.30	B
21.00	1	13	62.50	53.20	C+
20.00	5	12	47.50	49.30	C
19.00	1	7	32.50	45.40	D+
18.00	1	6	27.50	44.00	D+
17.00	1	5	22.50	42.40	D+
15.00	2	4	15.00	39.60	D
14.00	1	2	7.50	35.60	F
12.00	1	1	2.50	30.50	F

<u>หมายเหตุ</u> บรรณานุกรม

ชิดชนก เชิงเชาว์.(2543). การกำหนดเกรดของรายวิชา. เอกสารประกอบการฝึกอบรมเชิงปฏิบัติการ หลักสูตร “ การเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษา” รุ่นที่ 6. มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

สุรชัย มีชาญ (2546) . คะแนนและแนวคิดพื้นฐานในการตัดเกรด. วารสารศึกษาศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

จากอดีต สู่ ปัจจุบัน
Integration by Parts วิธีลัด
(จากแบบตรง สู่ แบบทแยง)

บทนำ

พล.ท.รศ. ธวัชชัย ศรีวัฒนะ อดีต อจ.กคศ.ฯ, ผอ.สกศ.ฯ และ รอง ผบ.รร.จปร.

ชื่อเรื่อง **จากอดีตสู่ปัจจุบัน** ที่ผมเล่าไว้เมื่อเล่มที่แล้ว ยังมีเรื่องย่อยจากอดีตที่ผมอยากเขียนถึงอยู่หลายเรื่องด้วยกัน ที่พอนึกได้ส่วนใหญ่จะเป็นเรื่องสนุกๆทำนองวิชาเกินเป็นส่วนใหญ่ แต่ในครั้งนี้ผมอยากเขียนเรื่องกึ่งวิชาการสักเรื่องหนึ่ง เนื่องจากผมใช้ชีวิตรับราชการอยู่ใน รร.จปร.ประมาณ ๓๓ ปี และครึ่งหนึ่งของชีวิตเป็นอาจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ จนน้องๆส่วนใหญ่มักเรียกผมว่าอาจารย์ ไม่ว่าผมจะดำรงตำแหน่งใดก็ตาม ผมจึงอยากเขียนส่วนหนึ่งของหัวข้อ Integration by Parts **ด้วยวิธีลัด** ที่ผมคิดว่ามีสอนอยู่ที่ รร.จปร.เพียงแห่งเดียวมานานแล้ว ซึ่งนับว่ามีประโยชน์มาก เรื่องนี้จึงน่าจะบันทึกไว้ในเสนาศึกษาเป็นประวัติศาสตร์ ผมเคยเรียนวิชาคณิตศาสตร์หัวข้อนี้ ขณะเป็นนักเรียนนายร้อย(นนร.) ชั้นปีที่ ๒ ณ กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา รร.จปร. ประมาณ ปี พ.ศ.๒๕๐๘ (คำว่า **ทางลัด** หรือ**วิธีลัด** หรือ **shortcut** เป็นที่นิยมมากในการใช้เทคโนโลยีในปัจจุบัน **การเรียนวิชาคำนวณในอดีตก็เป็นที่นิยมเช่นกัน เช่นในวิชาเรขาคณิต ถ้าเราจะอ้างถึงความจริงที่ว่า จัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากย่อมเท่ากับผลบวกของจัตุรัสบนด้านอีก ๒ ด้าน เราจะอ้างเพียงว่า ใช้ "ทบ.๒๘"**หรือการคำนวณ **65^2 = 4,225 หรือ 71^2 = 5,041 หรือ 99^2 = 9,801 ด้วยวิธีคิดในใจ ก็เป็นวิธีลัดวิธีหนึ่ง** ซึ่งต้องใช้การท่องจำช่วยด้วย แต่ระบบการศึกษาสมัยใหม่ที่ไม่ส่งเสริมการท่องจำ เลยต้องใช้เครื่องคิดเลขในทุกกรณีที่มีการคำนวณ ทั้งที่บางครั้งเป็นการคำนวณแบบง่ายๆ แต่หัวข้อที่ผมจะเขียนต่อไปนี้ ผมขอยืนยันได้ว่ายังคงมีการใช้อยู่ ไม่ล้าสมัยและยังมีประโยชน์แน่นอนโดยเฉพาะการช่วยประหยัดเวลา ผมได้เรียนถาม **พล.ต.ศ.ประเสริฐ กาญจนะวสิต** เมื่อเร็วๆนี้(ขณะนี้ท่านอายุ ๘๐ ปีแล้ว) ท่านค่อนข้างมั่นใจว่า ผู้ที่สอน**วิธีลัดของ**เรื่องนี้ น่าจะเป็น **พ.อ.สุธรรม ศักดิ์ศรี** หัวหน้ากองวิชาคณิตศาสตร์ในขณะนั้นเป็นผู้ริเริ่ม (ขณะนี้ท่านเสียชีวิตแล้ว) แต่ผมได้เรียนจากอาจารย์ท่านอื่นที่ผมจำชื่อท่านไม่ได้แล้วต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย ผมจึงขออนุญาตนำมาเผยแพร่เพื่อประโยชน์สาธารณะ เบื้องต้นขอให้ท่านลองเปรียบเทียบทั้ง ๒วิธีต่อไปนี้

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\sin 2x\,dx = (x)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int \frac{-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + K$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K$$

แบบตรงหรือวิธีสมมุติ(โจทย์และวิธีทำจากอินเทอร์เน็ต)

ได้นำมาเพียงบางส่วน ทำจริงจะยาวกว่านี้มาก

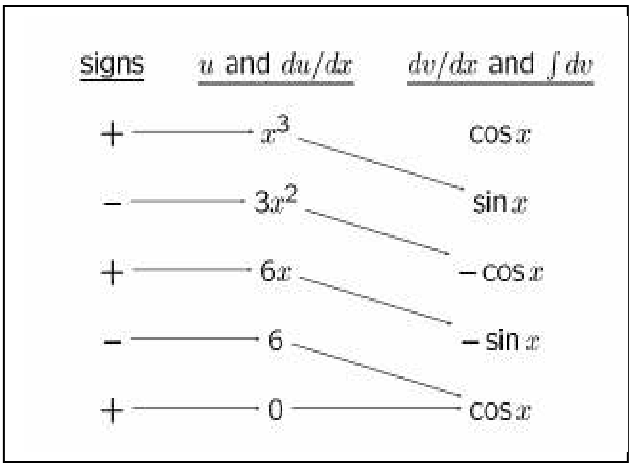
$$\int x\sin 2x dx = ?$$

วิธีทำ	**D**(u)		**I**(dv)
	x	+	sin 2x(dx)
	1	-	$-\frac{1}{2}$ cos 2x
	0	+	$-\frac{1}{4}$ sin 2x

$$\int x^2 \sin x dx = -\frac{1}{2}\text{xcos2x} + \frac{1}{4}\text{sin2x} + C$$

วิธีลัดแบบทแยง ของ รร.จปร.วิธีทำทั้งหมดมีเพียงแค่นี้

Integration by Parts เป็นเป็นหัวข้อสำคัญอย่างหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ในหัวข้อการอินทิเกรตผลคูณของ ๒ ฟังก์ชัน ในหนังสือคณิตศาสตร์ทุกเล่มได้มีการพิสูจน์สูตรในการทำโจทย์เรื่องนี้ และกระทำได้ไม่ยาก จนในที่สุดจะได้สูตร $\int udv = uv - \int vdu$ แต่ด้วย**วิธีลัด**ที่จะกล่าวต่อไปนี้จะเหมาะกับโจทย์ที่มีค่า $u = x^n$ ซึ่งโดยปกติต้องมีการสมมุติค่า u และ dv ซ้ำๆกันหลายครั้ง ทำให้เสียเวลามาก แล้วอาจารย์ก็แนะนำ**การใช้วิธีลัดแบบทแยง**ในรูปแบบโจทย์ชนิดต่างๆ **แต่มิได้มีการพิสูจน์ที่มาของวิธีลัดให้ดู** ในตอนแรกๆให้ นนร.ลองทำทั้ง ๒ วิธีควบคู่กันไปก่อน ในที่สุดอาจารย์จึงสรุปว่า ต่อไปให้ใช้วิธีลัดได้ และน่าจะนำไปใช้ในการเรียนวิชาวิศวกรรมศาสตร์ได้(วิชา Maths for Engineers และวิชาอื่นๆจะได้ประหยัดเวลา) เดิมผมตั้งใจจะเขียนเล่นๆเท่านั้น แต่เพื่อให้เนื้อหาเรื่องนี้สมบูรณ์ขึ้นจึงใช้เวลาว่างที่มีเหลือเฟือ **พยายามพิสูจน์ที่มาของวิธีลัดนี้ด้วยตนเองอยู่นานพอสมควร จนในที่สุดก็สำเร็จ(ให้ดูผลการพิสูจน์ท้ายหน้า ๓)** แต่ก็กลัวว่าจะไปซ้ำกับที่มีคนเขาทำมาก่อนแล้ว จึงได้พยายามใช้เทคโนโลยีในปัจจุบันคือ Google Search ค้นดูทั้งทางตรงและทางอ้อมโดยใช้ Keyword ที่เกี่ยวข้อง(พจนานุกรมแปล Keyword ว่า **"คำหลัก"** หรือ **"คำสำคัญ"** แต่ผมชอบใช้ว่า **"คำค้น"**มากกว่า) โดยใช้คำค้นว่า Integration by Parts, Integration by Parts Example และ Integration by Parts Short Method ได้พบว่ามีการกล่าวถึงวิธีลัดพร้อมแสดงตัวอย่างบ้างเหมือนกัน แต่ยังไม่ตรงกับที่อาจารย์ผมสอนมาเมื่อปี พ.ศ.๒๕๐๘ (ขอให้ดูตัวอย่างที่ผมนำมาแสดงต่อไปท้ายเรื่องนี้)วิธีที่พบในอินเทอร์เน็ตมีทั้ง วิธี **Tanzalin Method, Tic-Tac-Toe, Tabula Method** และวิธี **THE D-I METHOD** เมื่อพิจารณาแล้ว ผมเห็นว่าวิธี **Tabula Method** และ **THE D-I METHOD** ใกล้เคียงที่สุด แต่ทุกวิธีที่พบ การใช้วิธีลัด ยังไม่กะทัดรัดและชัดเจนพอสำหรับโจทย์ชนิดต่างๆ หลายแบบ ตอนต่อไปผมจะได้เรียบเรียงวิธีการที่อาจารย์เคยสอนผมมา บวกกับวิธีการพิสูจน์ที่มาของวิธีลัดที่ผมคิดเอง มาประกอบกัน(ให้ นนร.ลองเปรียบเทียบกับที่อาจารย์สอนอยู่ในปัจจุบัน) พร้อมทั้งแสดงตัวอย่าง ที่นำโจทย์มาจากอินเทอร์เน็ตบางข้อทำด้วยวิธีตรง(วิธีสมมุติตามสูตร)บางข้อก็ทำกึ่งวิธีทแยง(ดังตัวอย่างข้างล่างนี้) เพื่อเปรียบเทียบกัน(สำหรับโจทย์ที่ซับซ้อนมากๆ ท่านคงต้องใช้วิธีสมมุติตามปกติต่อไป) ผมจึงอยากเขียนเรื่องนี้เป็นหลักฐานไว้ในนิตยสารเสนาศึกษาของ รร.จปร. เพราะยังไม่เคยเห็นอาจารย์ รร.จปร.ที่ใช้วิธีลัดนี้อยู่ เขียนลงเสนาศึกษามาก่อน(ในสมัยแรกๆของนิตยสารเสนาศึกษาในอดีต เป็นนิตยสารเล่มหนึ่งที่มีคนเคยใช้เป็นเอกสารอ้างอิงในทางวิชาการมาก่อน โดยเฉพาะด้านวิทยาศาสตร์) ตารางข้างล่างนี้เป็นตัวอย่างส่วนหนึ่งจากเน็ต

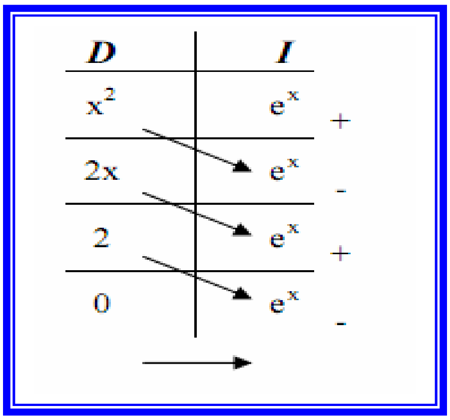


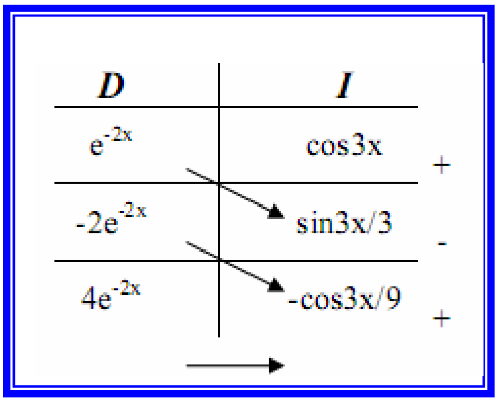
Tabular Method

Derivatives	Integrals	Sign	Same-color Products
$2x$	$(3x-2)^6$		
2	$\frac{1}{21}(3x-2)^7$	$+$	$\frac{2x}{21}(3x-2)^7$
0	$\frac{1}{504}(3x-2)^8$	$-$	$-\frac{1}{252}(3x-2)^8$

Tanzalin Method

$$\int x^2 e^x dx \qquad\qquad \int e^{-2x} \cos 3x dx$$



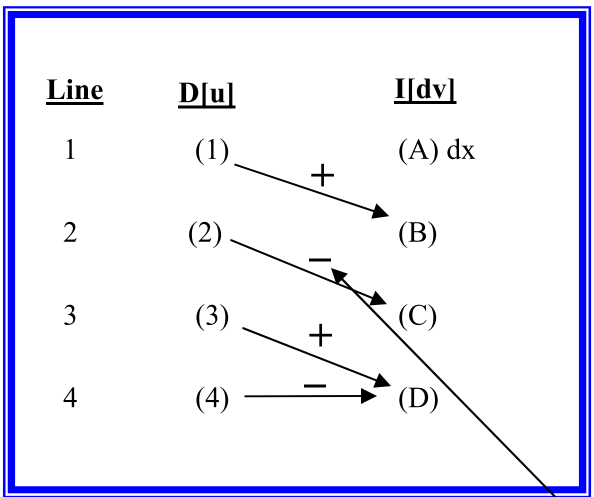


THE D-I METHOD

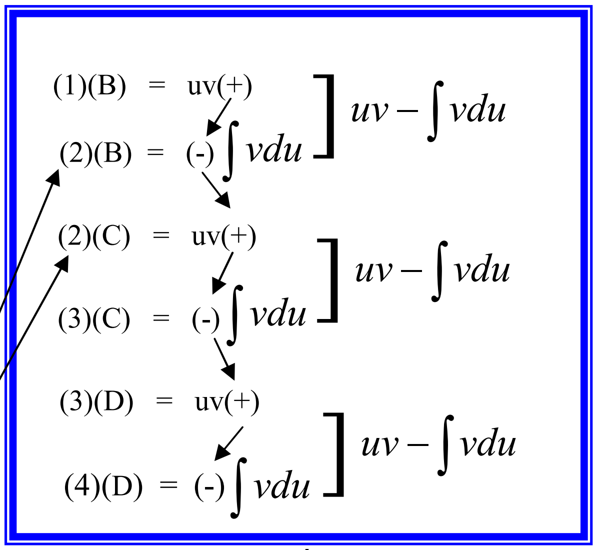
ถึงผมเกษียณอายุมา ๗ ปีแล้ว แต่ก็ยังคงจำ**วิธีลัด**นี้ได้เป็นอย่างดี แต่ยังไม่เคยเห็นวิธีพิสูจน์ที่มาของมัน โดยเฉพาะที่สงสัยว่าทำไมเครื่องหมายต้องสลับกันด้วย และผมก็ยังไม่ได้พิสูจน์มาก่อน ผมเคยนำวิธีลัดไปใช้ทำโจทย์เมื่อครั้งเรียนปริญญาโทที่สหรัฐอเมริกา ในปี พ.ศ.๒๕๒๕ อาจารย์เห็นว่าคำตอบถูกต้อง ท่านก็ไม่ได้ว่าอะไร(ทำให้ประหยัดเวลาไปใช้ทำข้ออื่นๆ) อาจารย์ จปร. เรียกว่า **Integration by Parts แบบทแยง ตามที่ผมได้กล่าวมาแล้ว ส่วนตัวผมจะเรียกเป็นภาษาอังกฤษด้วยว่า Integration by Parts(Diagonal)**

<u>วิธีพิสูจน์ที่มาของวิธีลัด</u>

<u>วิธีที่ ๑</u> วิธีลัดให้แบ่งโจทย์เป็น ๒ ส่วน คือ u(ต้อง diff.) และdv (ต้อง int.) หลังจากนั้นให้คูณทแยงลงเครื่องหมายที่คูณจะสลับกันคือ(+,-,+,-,...) ตาม **<u>รูปที่ ๑</u>** ข้อสงสัยน่าจะอยู่ที่ **ทำไมเครื่องหมายต้องสลับกัน** โดยผมจะพิสูจน์



<u>รูปที่ ๑</u>



<u>รูปที่ ๒</u>

- เครื่องหมายหน้า (2)(B) เป็น (-) ทำให้หน้า (2)(C)เป็น (-)ด้วย เกิดจาก (-)(+) = (-)

ทั้ง ๓ ส่วนของสูตร ทั้งส่วนของ uv, $\int vdu$ และการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมาย(ตามรูป) ดู **<u>รูปที่ ๑</u>** เมื่อ (1)(B), (2)(C) และ (3)(D) หรือ**การคูณทแยงลง**ก็คือค่า uv นั่นเอง และ (2)(B), (3)(C), (4)(D) หรือ**การคูณทางระดับ** (Line) ก็คือค่า $\int vdu$ กรณี u = x^n ใน Line 2, Line 3 หรือ Line 4 ถ้าสลับ u และ v และทำให้ diff. ได้ทุกครั้งจนเป็น 0 ในบรรทัดสุดท้าย เครื่องหมาย (+) ของ uv และเครื่องหมาย(-) หน้า $\int vdu$ เกิดขึ้นทุกครั้งที่มีการสมมุติ จึงนำมาสรุปได้ใน **<u>รูปที่ ๒ คือการสลับของเครื่องหมาย (+) และ (-)</u>** นั่นเอง ดังนั้นสามารถสรุปในประเด็นแรกก็คือ ถ้า (4) เป็น 0(ศูนย์) ได้ และคอลัมน์ขวา Int.ได้ทุกเทอม ทุกอย่างก็จะทำง่ายมาก (ตาม **<u>ต.ย.๑</u>** และ **<u>ต.ย.๒</u>** ถ้าไม่ได้ ก็ต้องหยุดแค่ Line 2 ดัง **<u>ต.ย.๓</u>** หรือหยุดแค่ Line 3 ดัง **<u>ต.ย.๔</u>**) แล้วทำด้วยวิธีปกติต่อไป (ขอให้ดูภาพข้างบนประกอบด้วย จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น)

<u>วิธีที่ ๒ พิสูจน์ว่าทำไมเครื่องหมายต้องสลับกัน</u> เป็นอีกวิธีที่ทำโดยวิธีการใช้สูตรหลัก $\int udv = uv - \int vdu$ หรือ $\int vdu = uv - \int udv$ ซ้ำกันหลายๆครั้งโดย**ยพิจารณาเฉพาะเครื่องหมายอย่างเดียว** การสลับค่า u และ v ย่อมทำได้เสมอ กรณีที่ u = x^n โดยกำลังของ x จะลดลงไปเรื่อยๆที่มีการ diff. จนในที่สุดก็จะมีค่าเป็น 0

จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu \;=\; uv - \int u_1 dv_1$

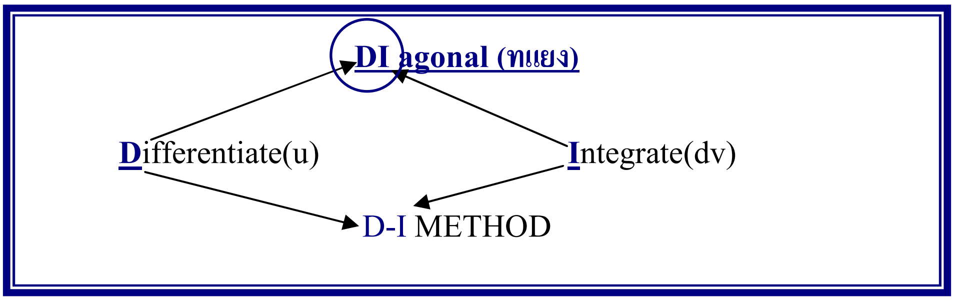
$$= uv - \left[u_1v_1 - \int v_1du_1\right] \qquad \text{(สลับค่า u และ v)}$$
$$= uv - u_1v_1 + \int v_1du_1$$
$$= uv - u_1v_1 + \int u_2dv_2 \qquad \text{(สลับค่า u และ v)}$$
$$= uv - u_1v_1 + \left[u_2v_2 - \int v_2du_2\right]$$
$$= uv - u_1v_1 + u_2v_2 - \int u_3dv_3 \qquad \text{(สลับค่า u และ v)}$$
$$= uv - u_1v_1 + u_2v_2 - \left[\,u_3v_3 - \int u_4dv_4\right]$$
$$= uv - u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 + \int u_4dv_4$$

(+) (-) (+) (-) (+) …………

(สังเกตการสลับกันของเครื่องหมาย + และ - เช่นเดียวกันกับวิธีที่ ๑ รวมทั้งการสลับค่า u และ v ทุกครั้งที่ใช้สูตร ด้วย)

เป็นอันว่า **ผมได้พิสูจน์ที่มาของวิธีลัดแล้ว** โดยสรุป **วิธีทแยง** กับโจทย์ทุกประเภท ก็ยังสั้น กะทัดรัด และง่ายกว่าวิธีตรงหรือวิธีสมมุติ ที่ตำราคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ใช้กัน

<u>หมายเหตุ</u> ที่น่าสังเกตอีกอย่างคือ คำว่า D-I METHOD ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งของการแก้ปัญหา ความหมายของ D และ I ยังได้ความหมายที่สอง ที่อาจารย์ของผมใช้ในการสอนใน รร.จปร. มาตั้งแต่ ปี พ.ศ.๒๕๐๘ คือคำว่า ทแยง หรือ Diagonal ก็คือ D = Differentiate ตรงกับความหมายการ Diff.(u) และ D ยังเป็นอักษรตัวแรกของ Diagonal หรือคำว่า ทแยงมุม(ที่อาจารย์ผมใช้ว่า ทแยง เฉยๆ เพราะไปตรงกับการใช้งาน ก็คือการคูณทแยงลงนั่นเอง และ I = Integrate ตรงกับความหมายการ Int.(dv) ซึ่งเป็นอักษรตัวที่สองของ Diagonal พอดี ดังนั้นที่ผมตั้งเองว่า Integration by Parts (Diagonal) จึงใกล้เคียงกับอีกความหมายพอดี(อะไรจะบังเอิญขนาดนั้น ดูรูปข้างล่างประกอบ)



Integration by Parts วิธีลัด จากแบบตรงสู่แบบทแยง ของ รร.จปร.

<u>จากสูตร</u> $\int udv = uv - \int vdu$ หรือ ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$

จะได้ $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

<u>วิธีลัด Integration by Parts แบบทแยง</u> อาจารย์ได้สอนผมมาตั้งแต่ปี พ.ศ.๒๕๐๘ ท่านให้แยกโจทย์ที่เป็น Integration ผลคูณของ Differentials รูปแบบต่างๆออกเป็น ๒ คอลัมน์ โดย <u>คอลัมน์ที่ ๑</u> ต้อง Differentiate(diff.) ใช้สัญลักษณ์ **D** หรือ u และ <u>คอลัมน์ที่ ๒</u> ใช้ I หรือ dv แทน Integrate(int.) เพื่อความง่าย ให้แบ่งการทำแบบทแยงเป็น ๓ แบบ ส่วนรายละเอียดอื่นๆ จะมีอธิบายในแต่ละแบบ ดังนี้

<u>แบบที่ ๑</u> ถ้าสามารถแบ่งโจทย์ เป็น u และ dv และสามารถ diff.(u) หรือ du จนเป็น 0 ได้ แล้วยังสามารถ int.(dv)ได้ไม่ยาก ให้แบ่งเป็น ๒ คอลัมน์ (<u>u</u> และ <u>dv</u>) ให้ diff.(u) จนเป็น 0 และ int.(dv) ตามไปตลอด เขียนลูกศรเฉียงลง และใส่เครื่องหมาย +, - สลับกันไป โดยคูณเฉียง(ทแยง)ลงทั้งจำนวนและเครื่องหมาย ดู (<u>ต.ย.๑</u>) (กรณีนี้ $u = x^n$ เมื่อ diff. ครั้งแรกแล้ว x^n จะกลายเป็น x^{n-1} เมื่อแทนค่าสูตรครั้งแรกแล้ว เราสามารถสลับค่า u และ v และสามารถทำซ้ำเช่นขั้นตอนแรกตามสูตรต่อไปเรื่อยๆ จนในที่สุด $u = 0$ ดูการพิสูจน์การสลับของเครื่องหมายวิธีที่๒ จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น) มักเป็นโจทย์ทั่วไปที่ไม่ซับซ้อนทางด้านวิศวกรรม เช่น $\int 2x(3x-2)^6 dx$, $\int x^2 \sin x dx$, $\int x^2 e^{4x} dx$ เป็นต้น

<u>ต.ย.๑</u> จงหาค่าของ $\int x^2 \sin x dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

- ด้วยวิธีทแยง ในที่นี้ควรกำหนดให้ u = x^2 และ dv = sinxdx

<u>u</u>		**<u>dv</u>**
x^2	+	sinx(dx)
2x	−	- cosx
2	+	- sinx
0	−	cosx

จะได้ $\int x^2 \sin x dx$ = - x^2 cosx + **2**xsinx + **2**cosx + C **<u>Ans.</u>**

ต.ย.๒ จงหาค่าของ $\int 2x(3x-2)^6 dx$

วิธีทำ ด้วยวิธีทแยงในที่นี้ควรกำหนดให้ u = 2x และ dv = $(3x-2)^6 dx$

หรือ dv = $\frac{1}{3}(3x-2)^6 d(3x-2)$

u		**dv**
2x		$\frac{1}{3}(3x-2)^6 d(3x-2)$
2	+	$\frac{1}{3X7}(3x-2)^7$
0	-	$\frac{1}{21X3X8}(3x-2)^8$
	+	

ดังนั้น $\int 2x(3x-2)^6 dx,\ = \ \frac{2}{21}(3x-2)^7 - \frac{1}{252}(3x-2)^8 + C$ Ans.

แบบที่ ๒ ถ้ากำหนด u แล้ว diff. เป็น 0 ได้ แต่ int. ไม่ได้ง่ายๆ จำเป็นต้องสลับค่า u และ dv แต่ให้ทำครั้งเดียว ที่เหลือเราสามารถทำต่อด้วยวิธีธรรมดาง่ายๆได้ (การทำ 1 ครั้งด้วยวิธีทแยง จะทำให้โจทย์ที่เหลือสั้น และง่ายขึ้น)

ต.ย.๓ จงหาค่าของ $\int x^2 \ln x dx$

วิธีทำ ด้วยวิธีทแยง ต้องกำหนด u = lnx และ dv = x^2dx เท่านั้น

u		**dv**
lnx		x^2(dx)
$\frac{1}{x}$	+	$\frac{x^3}{3}$
	−	

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3 lnx - \frac{1}{3}x^3 \right] + \mathrm{C}$$

Ans.

แบบที่ ๓ กรณีทำด้วยวิธีทแยงแล้ว ทำให้โจทย์สลับเพียงเครื่องหมายและฟังก์ชัน จนกลับไป เป็นเช่นเดิม ให้ทำ 3 บรรทัดจนเกิดเทอมซ้ำ แล้วหยุด ให้ดู **ต.ย.๔**

ต.ย.๔ จงหาค่าของ $\int e^x \cos x dx$

วิธีทำ ด้วยวิธีทแยง อาจสลับค่า u และ dv ได้ ถ้ากำหนด u = e^x และ dv = sinxdx

u		**dv**
e^x	$+$	$\cos x(dx)$
e^x	$-$	$\sin x$
e^x	$+$	$-\cos x$

$$\int e^x \cos x dx \;=\; e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2\int e^x \cos x dx \;=\; e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx \;=\; \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) \;+\; C$$

Ans.

ข้อควรระวัง ต้องระวังเรื่องตัวคงที่ ที่ต้องมีคูณหรือหาร และเครื่องหมาย + หรือ - ให้ดีเท่านั้น

ผมขอจบเรื่องวิชาการหนักๆก่อนนะครับ ซึ่งผมก็ได้บอกเหตุผลไว้ก่อนแล้วว่าทำไมจึงต้องการเขียนเรื่องนี้ลงเสนาศึกษาในปี พ.ศ.๒๕๕๔ มันไม่สายเกินไปหน่อยรึ ถ้าเปรียบเทียบกับข้อมูลที่มีในอินเทอร์เน็ตขณะนี้ ผมคิดว่ามันคงไม่มั้ง เนื่องจากผมไปเปิดดูตำราคณิตศาสตร์หลายเล่มที่อาจารย์ตามมหาวิทยาลัยในปัจจุบันเขียนขายนักศึกษา ก็ยังมีหัวข้อนี้อยู่ แต่ยืนยันได้ว่า ไม่มีการสอนเรื่องวิธีลัดเหมือนกับที่ รร.จปร. ใช้สอนมานานแล้วอย่างแน่นอน ถึงจะมีกล่าวอ้างบ้างในอินเทอร์เน็ตก็เป็นเพียงบางส่วน ไม่ละเอียดและเข้าใจง่ายเหมือนของเรา **โดยเฉพาะวิธีพิสูจน์ที่มาของวิธีลัด รับรองไม่เคยมีแน่นอน เพราะผมเพิ่งใช้ความรู้พิสูจน์ขึ้นมาเอง**

ดังนั้นเพื่อไม่ให้เป็นวิชาการมากเกินไปนัก ผมขอแถมเรื่องวิชาเกินอีกสัก ๓ เรื่อง เป็นการคลายเครียดจากวิชาคณิตศาสตร์ ถึงมันจะดูเป็นคนละเรื่องเดียวกัน แต่การสอนหนังสือในสมัยนี้ ถ้าไม่มีเรื่องเหล่านี้บ้างนักเรียนคงหลับหมดเป็นแน่ ทั้ง ๓ เรื่องเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับ**วิชาคณิตศาสตร์ทางอ้อม** ทั้งเรื่องใช้วิชาคณิตศาสตร์พิสูจน์รัก เรื่องจำนวนที่ว่า ½ (ครึ่งหนึ่ง)นั้น มันมีความหมายมากแค่ไหน และแถมด้วยภาพสวยๆตัวอย่างของ **ภาพเรขาคณิตกับ Crop Circles** ที่น่าพิศวงของคนทั่วโลก ถ้าฝืดไปหน่อยก็ขออภัยนะครับ

เรื่องที่ ๑ *หลักคณิตศาสตร์พิสูจน์ความรักได้*

หนึ่ง(หนุ่ม) และ **เอ**(สาว) เคยเรียนชั้นเดียวกันมาและเป็นแฟนกัน **หนึ่ง**อยากใช้หลักคณิตศาสตร์(ที่ทั้งสองคนชอบเหมือนกัน) พิสูจน์ความรักแบบหวานๆ **หนึ่ง**จึงถาม**เอ**ขึ้นว่า

หนึ่ง : **เอ**รู้ไหมว่า ข้างๆ**เอ**มีอะไรอยู่เคียงข้างเสมอ

เอ : ไม่รู้ซิ (แกล้งไม่รู้ แต่ใจจริงอยากตอบว่า**หนึ่ง**ไง แต่น่าจะคนละความหมายที่**หนึ่ง**จะเฉลย)

หนึ่ง : ก็**หนึ่ง**ไง **เอ**ไม่รู้รึ (**เอ**ยิ้มหวาน แต่ในใจคิดว่า **หนึ่ง**จะมาไม้ไหนนี่)

เอ : ก็จริงเฉพาะตอนนี้นะซิ แต่เวลา**เอ**อยู่บ้าน**เอ** **หนึ่ง**อยู่ที่ไหนก็ไม่รู้

หนึ่ง : ก็อยู่ข้าง**เอ**ไง **เอ**มองไม่เห็นเอง (**เอ**ทำหน้างง)

หนึ่ง : (อธิบาย) **เอ**จำไม่ได้เหรอ อาจารย์สอนคณิตศาสตร์สอนเราว่า ข้างๆ “a(เอ)” ย่อมมี “1(หนึ่ง)” เสมอ

เพราะว่าตามหลักคณิตศาสตร์ $a = 1xa = ax1 = a^1 = a/1$ **เอ**เห็นไหม ไม่ว่า**เอ**จะอยู่ที่ไหน **หนึ่ง**ย่อมอยู่เคียงข้าง**เอ**เสมอ อุตส่าห์พิสูจน์ด้วยหลักคณิตศาสตร์แล้ว ทีนี้เชื่อหรือยังว่า **หนึ่ง**อยู่เคียงข้าง**เอ**เสมอ

เอ : เชื่อแล้วจ้ะ (**เอ**ยอมจำนนต่อหลักคณิตศาสตร์ด้วยความชื่นใจ)

<u>**เรื่องที่ ๒**</u> ***<u>เหลือตั้งครึ่ง</u>***

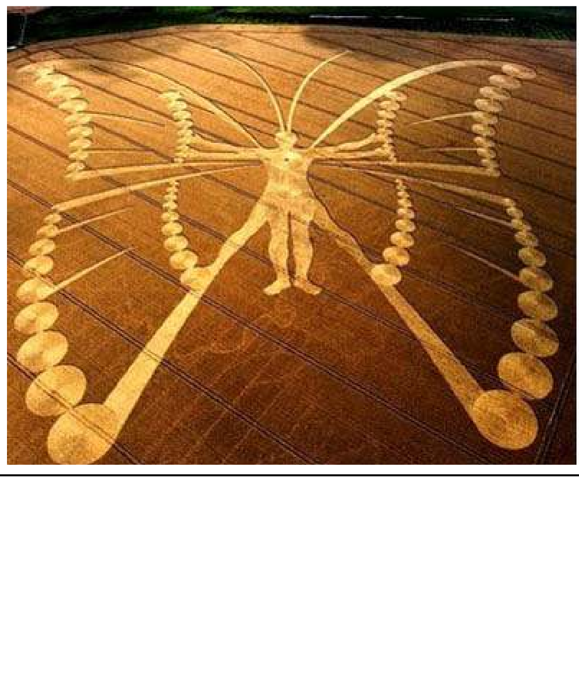
นายไก่ กะนายไข่ เป็นเพื่อนสนิทกัน ยืนฉี่อยู่ใกล้ๆกัน

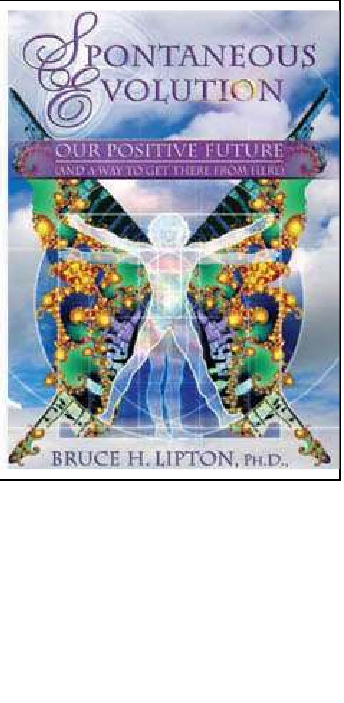
นายไก่ : เฮ้ยไอ้ไข่ เห็นหนังสือพิมพ์เขาลงว่า นายโดนเมียตัดไอ้นั่นไปแล้ว เนื่องจากเมียของนายจับได้ว่านายมีกิ๊ก แล้วทำไมนายถึงยังยืนฉี่ได้เนี่ย

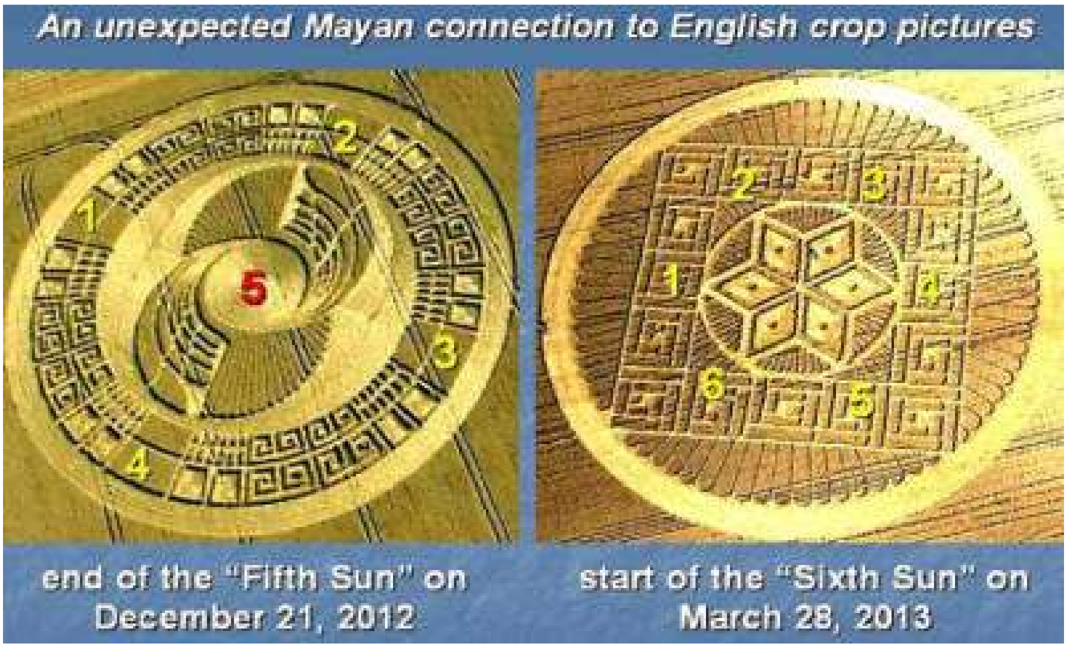
นายไข่ : เฮ้ยไอ้ไก่ กันโชคดีว่ะ ที่จริงเมียกันจับไม่ได้คาหนังคาเขาหรอก แต่เธอบอกว่า ถ้ากันสารภาพว่ามีกิ๊ก จะลดโทษให้กึ่งหนึ่ง กันก็เลยสารภาพว่ะ และนี่แหละคือความโชคดีที่กันสารภาพ **เธอเลยตัดไอ้นั่นของกันเพียงครึ่งเดียว** จึงทำให้ยังยืนฉี่ได้ว่ะ

นายไก่ : ???

<u>เรื่องที่ ๓</u> เกี่ยวกับศิลปะทางคณิตศาสตร์ในอินเทอร์เน็ตที่น่าสนใจหลายเรื่อง ถ้าท่านค้นโดย Google แล้วพิมพ์ออกมาจะสวยงามมาก ไม่ต้องเสียเงินซื้อหนังสือมาดู เรื่องลึกลับเรื่องหนึ่งในหลายเรื่องซึ่งเป็นที่สนใจของคนทั่วโลกมานานแล้วคือ Crop Circles ที่สงสัยกันว่าใครสร้าง สร้างทำไม สร้าง ได้อย่างไร แล้วรูปส่วนใหญ่ก็เป็น<u>รูปทรงเรขาคณิต</u> ที่ซับซ้อน และ สวยงาม ที่ผมยกมาให้ดูนับว่าเป็นส่วนน้อยของภาพสวยงามเหล่านั้น และด้วยคำค้นอื่นๆ ท่านก็จะได้ทั้ง ภาพพืช ภาพสัตว์ รวมทั้งภาพดอกไม้ที่ สวยงาม น่าชม น่าขยาย และพิมพ์ไว้ดูเป็นงานศิลปะที่น่าทึ่งอีกด้วย (๗ ปีหลังเกษียณผมเปลี่ยนโน้ตบุ๊กมาแล้ว ๒ เครื่อง และเปลี่ยนเครื่องพิมพ์มาแล้ว ๓ เครื่อง พร้อมทั้งได้พิมพ์ภาพสวยๆงามๆจากเน็ตไว้ดูเล่นหลายร้อยภาพแล้ว ผมคิดว่าถ้าเราสนใจเทคโนโลยีเพิ่มเข้าไปกับหลักการดำรงชีวิตแบบ ๕ อ.อีกซักอย่างแล้วละก็ เวลาก็จะผ่านไปอย่างรวดเร็ว ขอรับรองว่าจะทำให้ท่านแก่ช้าพร้อมสุขภาพแข็งแรงอีกด้วย ไอ้เรื่องโรคอัลไซเมอร์และโรคภัยไข้เจ็บที่คนสูงอายุนิยมเป็นกันลืมไปได้เลย) ผมขอบอกอีกว่า <u>เรื่องที่ลงวันนี้ ผมค้นคว้า เขียนและพิมพ์ด้วยตัวเองทั้งสิ้น</u>







Samples of Maths sign in Crop Circles

ผมขอจบเรื่องนี้เพียงแค่นี้ ถึงจะเป็นหัวข้อเรื่องเล็กๆทางคณิตศาสตร์ แต่ก็น่าภูมิใจที่เรานำมาใช้ใน รร.จปร. อย่างยาวนานและเกิดประโยชน์เล็กๆน้อยๆทางการศึกษาของ นนร. จึงน่าจะบันทึกไว้เป็นหลักฐาน ในนิตยสารเสนา ศึกษาของเรา ยิ่งในยุคนี้ก็ถือเป็นยุคแห่งการแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน และยังทำให้อดีต นนร. และ นนร.ที่ กำลังศึกษาอยู่ ได้รู้ที่มาที่ไปของเรื่องนี้ด้วยเช่นกัน